Planche n° 23. Fonctions convexes. Corrigé

Exercice n° 1

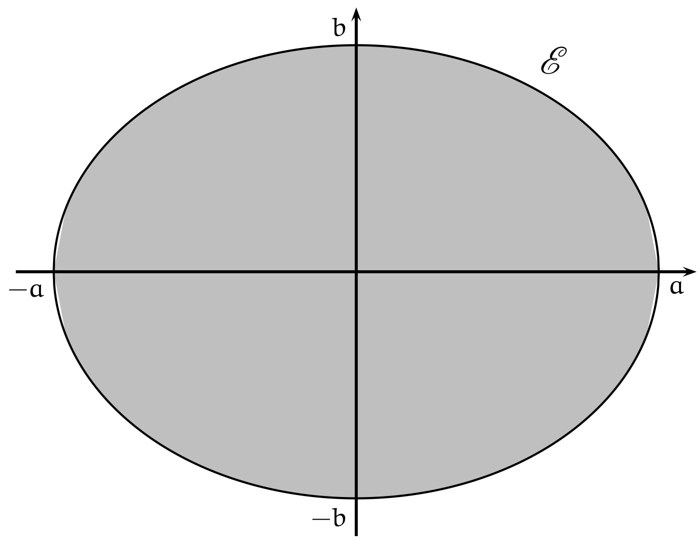
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tous réels α et β et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$,

$$((1-\lambda)\alpha+\lambda\beta)^2 \leqslant (1-\lambda)\alpha^2+\lambda\beta^2.$$

Soient $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\frac{((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)^2}{a^2}+\frac{((1-\lambda)y_1+\lambda y_2)^2}{b^2} &\leqslant \frac{(1-\lambda)x_1^2+\lambda x_2^2}{a^2}+\frac{(1-\lambda)y_1^2+\lambda y_2^2}{b^2}\\ &= (1-\lambda)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+\lambda\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)\\ &\leqslant (1-\lambda)+\lambda \text{ (car } 1-\lambda\geqslant 0 \text{ et } \lambda\geqslant 0)\\ &= 1.\end{aligned}$$

On a montré que pour tous $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)(x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2) \in \mathscr{E}$. Donc, $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.



Exercice n° 2

1) Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$.

• $m = \dfrac{x+y}{2} \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$. Donc, $m \leqslant y$.

• $m-g = \dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy} = \dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2} \geqslant 0$. Donc, $g \leqslant m \leqslant y$.

• $g = \sqrt{xy} \geqslant \sqrt{x\times x} = x$. Donc, $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

$\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ avec $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$. D'après ce qui précède, $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{g} = \sqrt{\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et donc $x \leqslant h \leqslant g \leqslant y$ et finalement

$$x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y.$$

2) Soient x_1, ..., x_n n réels strictement positifs où $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est concave sur $]0,+\infty[$ car sa dérivée seconde, à savoir $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$, est strictement négative sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que $\dfrac{1}{n}\ln(x_1)+\ldots+\dfrac{1}{n}\ln(x_n) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{n}x_1+\ldots+\dfrac{1}{n}x_n\right)$ ou encore $\ln\left(\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)$ ou enfin $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Exercice n° 3

1) 1ère solution. Soient $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et x et y deux réels positifs. L'inégalité est immédiate quand $x=0$ ou $y=0$. Dorénavant, x et y sont strictement positifs. Par concavité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$,

$$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)=\frac{1}{p}\ln\left(x^p\right)+\frac{1}{q}\ln\left(x^q\right)\leqslant \ln\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}x^q\right)$$

et donc $xy\leqslant \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{x^q}{q}$par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

2ème solution. Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ puis x et y deux réels positifs. L'inégalité est immédiate quand $y=0$. Soit $y>0$ fixé.

Pour $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}-xy$. Puisque $p>1$, la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\geqslant 0$, $f'(x)=x^{p-1}-y$. f admet donc un minimum en $x_0=y^{1/(p-1)}$ égal à

$$f\left(y^{1/(p-1)}\right)=\frac{y^{p(p-1)}}{p}+\frac{y^{p/(p-1)}}{q}-y^{1/(p-1)}y=y^{p/(p-1)}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)=0.$$

Finalement, f est positive sur $[0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\forall x\geqslant 0,\ \forall y\geqslant 0,\ xy\leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.}$$

2) Inégalités de Hölder. Posons $A=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p$ et $B=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q$.

Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.

On suppose dorénavant que $A>0$ et $B>0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{A^{1/p}}\times\frac{|b_k|}{B^{1/q}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^p}{pA}+\frac{|b_k|^q}{qB}\right)=\frac{1}{pA}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p+\frac{1}{qB}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q=\frac{1}{pA}\times A+\frac{1}{qB}\times B=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|\leqslant A^{1/p}B^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|$, on a montré que

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}\ \text{(Inégalité de Hölder).}}$$

Remarque. Quand $p=q=2$, on a bien $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}\ \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

3) Inégalité de Minkowski. Soit $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p&=\sum_{k=1}^{n}|a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\&=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p=0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.

Sinon $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p>0$ et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p$, on obtient $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\ \text{(Inégalité de Minkowski).}}$$

Exercice n° 4

1) La fonction exponentielle est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Son graphe est au-dessus de sa tangente en le point $(0,1)$ et même strictement au-dessus à part en son point de contact. Donc, pour tout réel x, $e^x\geqslant 1+x$ et même

$$\forall x\neq 0,\ e^x>1+x.$$

2) La fonction $t\mapsto\ln(1+t)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ car sa dérivée seconde, à savoir $t\mapsto-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ est négative sur cet intervalle. Son graphe est au-dessous de sa tangente en $(0,0)$ sur $]-1,+\infty[$ et donc,

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x)\leqslant x.$$

3) La fonction $t\mapsto\sin t$ est concave sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ car sa dérivée seconde, à savoir $t\mapsto-\sin t$ est négative sur cet intervalle. Sur cet intervalle, son graphe est au-dessus de sa tangente en $(0,0)$ et au-dessus de la corde joignant les points $(0,0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$. On en déduit que

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}\leqslant\sin x\leqslant x.$$

Exercice n° 5

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x)=-\cos(3x)-\cos(2x)-\cos(x)=-2\cos(2x)\cos(x)-\cos(2x)=-\cos(2x)(2\cos(x)+1).$$

Les expressions $\cos(2x)$ et $2\cos(x)+1$ ne s'annulent pas simultanément et donc f'' s'annule en un certain réel x_0 en changeant de signe si et seulement $\cos(2x_0)=0$ ou $2\cos(x_0)+1=0$ ce qui équivaut à $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)$.

Les points d'inflexion de la courbe représentative de f sont les points $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},f\left(\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, et les points $\left(\varepsilon\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,f\left(\varepsilon\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

Graphe de f.