Planche n° 23. Fonctions convexes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**) :

Soit $\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$).

Exercice n° 2 (I) :** (Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique)

1) Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ (moyenne harmonique). Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

2) Plus généralement, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ puis tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

en utilisant la convexité d'une certaine fonction.

Exercice n° 3 (** I) :** (Inégalités de Hölder et de Minkowski et « norme α ».)

1) Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Montrer que pour $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ (on utilisera la concavité d'une certaine fonction).

2) En déduire que $\forall ((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$$

(inégalité de Hölder).

c) En déduire que $\forall ((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$ (inégalité de Minkowski).

Exercice n° 4 (I) :**

Démontrer que

1) Pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$ et même pour tout réel non nul x, $e^x > 1 + x$.

2) Pour tout réel x de $]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

3) Pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

Mémoriser ces inégalités classiques.

Exercice n° 5 (T) :**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{9}\cos(3x) + \dfrac{1}{4}\cos(2x) + \cos(x)$. Déterminer les points d'inflexion de f.

