Chapitre 23. Comparaison des suites en l'infini

Plan du chapitre

1 Les différentes relations de comparaison

1.1 Définition des relations de comparaison

1.1.1 Relation de domination

DÉFINITION 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quelconque, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M\,|v_n|.$$

Si la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, dire que la suite u est dominée par la suite v équivaut à dire que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.

Notations. Quand la suite u est dominée par la suite v, on écrit

$$u_n \underset{+\infty}{=} O\left(v_n\right) \text{ (notation de LANDAU)}$$

ou

$$u_n \underset{+\infty}{\preccurlyeq} v_n \text{ (notation de HARDY).}$$

La notation la plus fréquemment utilisée est la notation de LANDAU $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(v_n\right)$ mais la notation de HARDY $u_n \underset{+\infty}{\preccurlyeq} v_n$ est parfois utilisée, cette notation ayant entre autre le mérite de pouvoir être renversée : si la suite v **domine** la suite u, on écrit $v_n \underset{+\infty}{\succcurlyeq} u_n$.

⇨ **Commentaire** . *Il faut expliquer chacune des deux notations. La lettre O est l'initiale de l'expression « ordre de grandeur ». Dire que $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(v_n\right)$ signifie que l'ordre de grandeur en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est inférieur ou égal à l'ordre de grandeur de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$. Par exemple, $n \underset{+\infty}{=} O\left(n^2\right)$ ou $\dfrac{1}{n^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ou aussi $n \underset{+\infty}{=} O(n)$ ou $2n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{n}{2}\right)$ car chacune des deux suites $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a le même ordre de grandeur à savoir l'ordre de grandeur de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Ensuite, il ne faut pas confondre $\underset{+\infty}{\preccurlyeq}$ avec $\leqslant$. $\leqslant$ est la relation d'ordre usuelle permettant de comparer à n fixé les nombres u_n et v_n. Par exemple, $\exists n \in \mathbb{N},\ 2n-3 \nleqslant n$ et même $\forall n \geqslant 4,\ 2n-3 > n$ mais par contre, on a $2n-3 \underset{+\infty}{\preccurlyeq} n$ car l'ordre de grandeur de $2n-3 = 2n^1-3$, à savoir l'exposant 1 est le même que l'ordre de grandeur de $n = n^1$. On peut démontrer directement le fait que $2n-3 \underset{+\infty}{\preccurlyeq} n$: pour $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \dfrac{2n-3}{n} = 2 - \dfrac{3}{n} \leqslant 2$ et donc la suite $\left(\dfrac{2n-3}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée.

Théorème 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si la suite v ne s'annule pas, $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(v_n\right)$ si et seulement si il existe une suite bornée $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n w_n$.

DÉMONSTRATION . Soit $w = \dfrac{u}{v}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n w_n$. De plus, $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(v_n\right)$ si et seulement si la suite w est bornée.

❏

En particulier, on a immédiatement

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $u_n \underset{+\infty}{=} O(1)$.

Exemples.

- $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} O(1)$.
- $\dfrac{2n+3}{n-5} \underset{+\infty}{=} O(1)$ car la suite $\left(\dfrac{2n+3}{n-5}\right)$ est convergente et en particulier bornée.

- $\dfrac{2n+3}{n^2-5} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ car pour $n \geqslant 3$,

$$\left|\frac{(2n+3)/(n^2-5)}{1/n}\right| = \frac{2n^2+3n}{n^2-5} \leqslant \frac{2n^2+3n^2}{n^2-5} = \frac{1}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{n^2}} \leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}} = \frac{45}{4}$$

et donc la suite $\left(\dfrac{(2n+3)/(n^2-5)}{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

- $\dfrac{3}{n} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- $\dfrac{e^{in\pi/3}}{n} \underset{+\infty}{=} O(1)$.

❑

1.1.2 Relation de prépondérance

Définition 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable devant** la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge et a pour limite 0.

Dit autrement, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|)\,.$$

Notations. Quand la suite u est négligeable par la suite v, on écrit

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \text{ (notation de Landau)}$$

ou

$$u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n \text{ (notation de Hardy).}$$

La notation la plus fréquemment utilisée est la notation de Landau $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ mais la notation de Hardy $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$ est parfois utilisée, cette notation ayant entre autre le mérite de pouvoir être renversée : si la suite v est **prépondérante devant** la suite u, on écrit $v_n \underset{+\infty}{\gg} u_n$. ❑

⇨ **Commentaire**. *Dire que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ signifie que l'ordre de grandeur en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement inférieur à l'ordre de grandeur de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$. Par exemple, $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$ ou $\dfrac{1}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En effet*

$$\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Théorème 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si la suite v ne s'annule pas, $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, de limite nulle, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n w_n$.

Démonstration. Soit $w = \dfrac{u}{v}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n w_n$. De plus, $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si la suite w converge vers 0.

❑

Les deux théorèmes suivants sont immédiats.

Théorème 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$.

Plus généralement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $u_n \underset{+\infty}{=} \ell + o(1)$.

⇨ **Commentaire**. *Le théorème 4 énonce explicitement des résultats immédiats. Le but est de s'approprier des notations. Par exemple, un exercice classique de classes préparatoires consiste à montrer que la suite* $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *où* $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, *converge vers* γ *la constante d'Euler. Ceci s'écrivait jusque là* $\lim_{n\to+\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$ *et pourra dorénavant s'écrire* $H_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ *ce qui se lit* $H_n - \ln n$ *est égal à* γ *plus une suite tendant vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$. *On peut donc aussi écrire*

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Théorème 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$.

1.1.3 Relation d'équivalence des suites

Définition 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
On dit que la suite u est **équivalente** à la suite v en $+\infty$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Notation. Quand la suite u est équivalente à la suite v en $+\infty$, on écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple. $2n^2 - 3n + 5 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2$ car $\frac{2n^2 - 3n + 5}{2n^2} = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Théorème 6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Démonstration.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + v_n o(1)$$
$$\Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n) \ \left(\text{car } \frac{v_n o(1)}{v_n} = o(1) \underset{n\to+\infty}{\to} 0\right).$$

❑

Par exemple, dire que $n^2 - 3n + 5 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ équivaut à dire que $-3n + 5$ est négligeable devant n^2 et donc que $n^2 - 3n + 5 \underset{n\to+\infty}{=} n^2 + o(n^2)$.

On met tout de suite en garde contre une erreur classique.

Les phrases « $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ » et « $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ » n'ont aucun rapport.

En effet, les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ vérifient $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais $\frac{1/n}{1/n^2} = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ne sont pas des suites équivalentes. Donc,

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \not\Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

De même, les suites $(n^2 + n)$ et (n^2) sont équivalentes car $\frac{n^2 + n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
Mais $(n^2 + n) - n^2 = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On donne maintenant un formulaire d'équivalents usuels. Ce formulaire est un démarrage et sera largement complété dans le chapitre « Comparaison des fonctions en un point ».

Théorème 7. Formulaire d'équivalents usuels.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ ou encore $(1+u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \alpha u_n + o(u_n)$.
- $\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\dfrac{1}{1-u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)$.
- $\dfrac{1}{1+u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$ ou encore $\dfrac{1}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - u_n + o(u_n)$.
- $\sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}u_n$ ou encore $\sqrt{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{2}u_n + o(u_n)$.

- $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)$.
- $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)$ (ou aussi si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$).
- $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\mathrm{Arcsin}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\mathrm{Arcsin}(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\mathrm{Arctan}(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\mathrm{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\mathrm{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $1 - \cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$ ou encore $\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right)$.
- $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$ ou encore $\mathrm{ch}(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right)$.

Démonstration .

• Si f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-a, a[$ $(a > 0)$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = f'(0) = 1.$$

Puisque (u_n) est une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang de limite nulle, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_n)}{u_n} = 1$ ou encore $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Ceci montre que

$$e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,\ \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,\ \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,\ \tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,$$
$$\mathrm{Arcsin}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,\ \mathrm{Arctan}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,\ \mathrm{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $u > -1$, posons $f(u) = (1+u)^\alpha$.

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+u_n)^\alpha - 1}{\alpha u_n} = 1$ ou encore que $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

En particulier, $\sqrt{1+u_n} - 1 = (1+u_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}u_n$.

• On peut donner un équivalent de $\dfrac{1}{1-u_n}$ et $\dfrac{1}{1+u_n}$ à partir de la formule précédente appliquée à $\alpha = -1$. Mais on peut peut obtenir cet équivalent directement par un calcul **algébrique** :

$$\frac{\dfrac{1}{1-u_n} - 1}{u_n} = \frac{1 - (1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \frac{1}{1-u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et donc $\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. En remplaçant u_n par $-u_n$, on obtient $\dfrac{1}{1+u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$.

• $\dfrac{1-\cos(u_n)}{\dfrac{u_n^2}{2}} = \dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{u_n}{2}\right)}{\dfrac{u_n^2}{2}} = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right)}{\dfrac{u_n}{2}}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et donc $1 - \cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$. La démarche est analogue pour le cosinus hyperbolique à partir de la formule $\mathrm{ch}(u_n) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$ (démontrez d'abord cette formule).

❏

1.2 Propriétés des relations de comparaison

1.2.1 Propriétés de o et O

Dans les théorèmes qui suivent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... sont des suites complexes, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang si nécessaire.

Théorème 8.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$. Dit autrement

$$O(O(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n).$$

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. Dit autrement

$$o(o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n).$$

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ ou si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. Dit autrement

$$O(o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n) \text{ et } o(O(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n).$$

Démonstration. Pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n}$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, alors les suites $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ et $\left(\dfrac{v_n}{w_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ sont bornées. Il en est de même de la suite $\left(\dfrac{u_n}{w_n}\right)_{n\geqslant n_0} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0} \times \left(\dfrac{v_n}{w_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ qui est un produit de suites bornées et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors les suites $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Mais alors, $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \times 0 = 0$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant M|v_n|$. Pour n suffisamment grand, $\left|\dfrac{u_n}{w_n}\right| \leqslant M\left|\dfrac{v_n}{w_n}\right|$ et donc $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour n suffisamment grand, $|v_n| \leqslant M|w_n|$. Pour n suffisamment grand, $\left|\dfrac{u_n}{w_n}\right| = \left|\dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n}\right| \leqslant M\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|$ et donc $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

❏

Théorème 9.

• Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors $v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$. Dit autrement

$$O(u_n) + O(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n).$$

• Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$, alors $v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. Dit autrement

$$o(u_n) + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n).$$

Démonstration. Pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{v_n + w_n}{u_n} = \dfrac{v_n}{u_n} + \dfrac{w_n}{u_n}$.

• Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors les suites $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ et $\left(\dfrac{w_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ sont bornées. Il en est de même de la suite $\left(\dfrac{v_n + w_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ qui est une somme de suites bornées et donc $v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

• Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$, alors $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\dfrac{w_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Mais alors, $\dfrac{v_n + w_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 + 0 = 0$ et donc $v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

❏

Ainsi, par exemple, $n + o(n) + 2n + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} 3n + o(n)$.

Théorème 10. Soit λ un complexe non nul.
- $O(\lambda u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
- $o(\lambda u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Démonstration .

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = O(\lambda u_n)$. Alors, pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{v_n}{u_n} = \lambda \dfrac{v_n}{\lambda u_n}$. La suite $\left(\dfrac{v_n}{\lambda u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée et donc la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée ou encore $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = o(\lambda u_n)$. Alors, pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{v_n}{u_n} = \lambda \dfrac{v_n}{\lambda u_n}$. $\dfrac{v_n}{\lambda u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda \times 0 = 0$ ou encore $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

❑

Ainsi, par exemple, $o\left(\dfrac{2n^2}{3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$.

Théorème 11.
- $u_n O(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n v_n)$. Plus généralement, $O(u_n)\,O(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n v_n)$.
- $u_n o(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n v_n)$. Plus généralement, $o(u_n)\,o(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n v_n)$.

Démonstration .

- Pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{u_n O(v_n)}{u_n v_n} = \dfrac{O(v_n)}{v_n}$. La suite $\left(\dfrac{O(v_n)}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée et il en de même de la suite $\left(\dfrac{u_n O(v_n)}{u_n v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ et donc $u_n O(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n v_n)$.

Plus généralement, pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{O(u_n)\,O(v_n)}{u_n v_n} = \dfrac{O(u_n)}{u_n} \times \dfrac{O(v_n)}{v_n}$. Les suites $\left(\dfrac{O(u_n)}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ et $\left(\dfrac{O(v_n)}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ sont bornées et il en de même de la suite $\left(\dfrac{O(u_n)\,O(v_n)}{u_n v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ et donc $O(u_n)\,O(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n v_n)$.

- Pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{u_n o(v_n)}{u_n v_n} = \dfrac{o(v_n)}{v_n}$. $\dfrac{o(v_n)}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\dfrac{u_n o(v_n)}{u_n v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ou encore $u_n o(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n v_n)$.

Plus généralement, pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{o(u_n)\,o(v_n)}{u_n v_n} = \dfrac{o(u_n)}{u_n} \times \dfrac{o(v_n)}{v_n}$. $\dfrac{o(u_n)}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\dfrac{o(v_n)}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par suite, $\dfrac{o(u_n)}{u_n} \times \dfrac{o(v_n)}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \times 0 = 0$ et donc $o(u_n)\,o(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n v_n)$.

❑

Ainsi, par exemple, $n^2 o\left(n^4\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^6\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^6 o(1)$.

Théorème 12.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $O(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Dit autrement

$$O(u_n + o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n).$$

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $o(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Dit autrement

$$o(u_n + o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n).$$

Démonstration .

- $u_n + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n + O(u_n) = O(u_n) + O(u_n) = O(u_n)$ puis $O(u_n + o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} O(O(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

• $u_n + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ puis $o(u_n + o(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(O(u_n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

❑

Ainsi, par exemple, $o\left(2n^2 - 3n + 5\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(2n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$.

Théorème 13. Soit α un réel strictement positif.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, alors $|u_n|^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} O\left(|v_n|^\alpha\right)$. Dit autrement

$$|O(u_n)|^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} O\left(|u_n|^\alpha\right).$$

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $|u_n|^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(|v_n|^\alpha\right)$. Dit autrement

$$|o(u_n)|^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(|u_n|^\alpha\right).$$

Démonstration . Pour n supérieur ou égal à un certain n_0, $\dfrac{|u_n|^\alpha}{|v_n|^\alpha} = \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|^\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée, alors la suite $\left(\dfrac{|u_n|^\alpha}{|v_n|^\alpha}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée, et si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors $\dfrac{|u_n|^\alpha}{|v_n|^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

❑

1.2.2 Propriétés de $\sim$

Commençons par rappeler que

Théorème 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. $u_n + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Théorème 15. La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang ou encore, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang :

• $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;
• $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;
• $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n\right) \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Démonstration .

• $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

• $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Rightarrow \dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

• $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Rightarrow \dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \times 1 = 1 \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

❑

Théorème 16. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

• $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n\right) \Rightarrow u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_nt_n$.
• $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n\right) \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{w_n}{t_n}$.

Exemple. Le théorème précédent dit que dans un **produit** ou un **quotient**, si on remplace chaque **facteur** par un facteur équivalent, on obtient une suite équivalente. Par exemple, déterminons un équivalent simple en $+\infty$ de

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\times\cos\left(\frac{1}{n}\right)\times\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\ln^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\times\sqrt{4n+3}}.$$

Puisque $\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $\sin\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$. De même, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, $e^{\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. D'autre part, $4n+3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n$ et donc $\sqrt{4n+3}=(4n+3)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (4n)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n}$. Donc,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{n}\times 1\times\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2\times 2\sqrt{n}} = 6n\sqrt{n}.$$

❏

Démonstration . Supposons $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n\right)$.

$$\frac{u_n v_n}{w_n t_n} = \frac{u_n}{w_n}\times\frac{v_n}{t_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1\times 1 = 1$$

et donc $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n t_n$. De même,

$$\frac{u_n/v_n}{w_n/t_n} = \frac{u_n}{w_n}\times\frac{t_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1\times\frac{1}{1} = 1$$

et donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{w_n}{t_n}$.

❏

Théorème 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang et α un réel.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Démonstration . Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ puis $\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} 1^\alpha = 1$ et donc $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

❏

Théorème 18. Un polynôme en n, non nul, est équivalent à son monôme de plus haut degré.
Une fraction rationnelle en n, non nulle, est équivalente au quotient de ses monômes de plus haut degré.

Démonstration .

• Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $P(n)=\sum_{k=0}^{p} a_k n^k$ où $p\in\mathbb{N}$, $(a_0,\ldots,a_p)\in\mathbb{C}^{p+1}$ et $a_p\neq 0$. Pour $n\geqslant 1$,

$$\frac{P(n)}{a_p n^p} = 1+\frac{a_{p-1}}{a_p n}+\ldots+\frac{a_0}{a_p n^p}.$$

Donc, $\frac{P(n)}{a_p n^p} \underset{n\to+\infty}{=} 1+o(1)$ puis $P(n) \underset{n\to+\infty}{=} a_p n^p + o\left(a_p n^p\right)$ ou encore $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$.

• Pour n suffisamment grand, posons $R(n)=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{\sum_{k=0}^{p} a_k n^k}{\sum_{k=0}^{q} b_k n^k}$ où $(p,q)\in\mathbb{N}$, $(a_0,\ldots,a_p,b_0,\ldots,b_q)\in\mathbb{C}^{p+q+2}$ et $a_p\neq 0$ et $b_q\neq 0$.

D'après ce qui précède el le théorème 16,

$$R(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}.$$

❏

Passons maintenant aux principaux problèmes que l'on rencontre avec des équivalents. Il y a six pièges quand on les manipule :

- on n'écrit pas qu'une suite est équivalente à 0 ;
- on ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents ;
- on ne passe pas aux logarithmes dans des équivalents ;
- on n'additionne pas membre à membre des équivalents ;
- on ne passe pas de l'autre côté d'un équivalent pour l'addition ;
- on ne supprime pas les constantes multiplicatives.

Reprenons ces problèmes dans l'ordre.

Problème n° 1.

On n'écrit jamais qu'une suite est équivalente à 0.

La première raison est que l'on a défini la relation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites **ne s'annulant pas à partir d'un certain rang**. Même la définition n'utilisant pas de fractions ($u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$) ne peut pas fonctionner si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle car aucune suite n'est négligeable devant la suite nulle.
On peut aller plus loin. Si on se permettait d'écrire que $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ sont équivalents à 0, alors $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ serait équivalents, ce qui n'est pas.

Problème n° 2.

On ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents.

Par exemple, $n^2+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ mais $\dfrac{e^{(n^2+n)}}{e^{(n^2)}} = e^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc $e^{(n^2+n)} \underset{n\to+\infty}{\gg} e^{(n^2)}$ et en tout cas, $e^{(n^2+n)} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} e^{(n^2)}$.

La règle est permettant de gérer les exponentielles est la suivante :

Théorème 19. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Dit autrement,

$$e^{u_n+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}.$$

Démonstration . $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow e^{u_n-v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (car $u_n - v_n = \ln\left(e^{u_n-v_n}\right)$.)

❑

Ainsi, on obtient un équivalent d'une suite du type e^{u_n} en effaçant tous les termes tendant vers 0 dans l'exposant. Par exemple,

$$e^{n^2-n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2-n+\frac{1}{2}}.$$

Par contre, on ne peut pas simplifier davantage. Si par exemple, on supprime le terme $\frac{1}{2}$, la suite obtenue n'est plus équivalente.

Problème n° 3.

On ne passe pas aux logarithmes dans des équivalents.

Dit autrement :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n).$$

Le principal problème pour donner un équivalent de $\ln(u_n)$ est quand u_n tend vers 1. On rappelle d'abord la bonne façon d'obtenir un équivalent : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$. Par exemple,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Si par contre, on cherche à donner d'abord un équivalent de $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (par exemple,

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{17}{n}$$

et les équivalents écrits sont tout à fait justes), puis qu'on passe aux logarithmes, on obtient $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{17}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{17}{n}$ ou encore pire $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1) = 0$ ce qui est totalement faux.

Il existe néanmoins des situations où on peut passer aux logarithmes dans les équivalents. La situation la plus simple est quand u_n tend vers un réel strictement positif ℓ différent de 1. Dans ce cas, on a immédiatement $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ell)$. Par exemple, $\ln\left(\frac{2n+3}{n-5}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2)$. Sinon, on a le théorème suivant :

Théorème 20. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

⇨ **Commentaire** . *On peut résumer le théorème précédent en disant que si u_n et v_n sont soit des infiniment petits équivalents, soit des infiniment grands équivalents, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.*

Démonstration .

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Puisque $v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n$, on a aussi $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ puis

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} &= \frac{\ln\left(v_n \times \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{o(1)}{\ln(v_n)} \text{ (car } \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) \text{ (car } v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il suffit d'appliquer ce qui précède aux suites $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

❏

Par exemple, $\text{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc

$$\ln(\text{ch}(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = \ln(n) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

ou aussi, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc

$$\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n).$$

Problème n° 4.

On n'additionne pas membre à membre des équivalents.

Par exemple, si $u_n = n^2+n+3$ et $v_n = -n^2+\sqrt{n}+1$, on a par exemple, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2+\sqrt{n}$. Pourtant, $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n^2 + \left(-n^2+\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}$. En effet, $u_n + v_n = n + \sqrt{n} + 4 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Le plus simple pour être sûr de ne pas faire d'erreurs de raisonnement avec les équivalents et les sommes, est de revenir systématiquement au théorème

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o\left(u_n\right).$$

Déterminons par exemple un équivalent simple de $\sqrt{n^4+3n^3-1}-n^2$ (une catastrophe serait $\sqrt{n^4+2n^3-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^4}=n^2$ et donc $\sqrt{n^4+2n^3-1}-n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$).

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4+3n^3-1}-n^2 &= \sqrt{n^4}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}-n^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n^4}\left(1+\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}-n^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(1+\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n^2+\frac{3n}{2}-n^2+o(n) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3n}{2}+o(n) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n}{2}.
\end{aligned}$$

Problème n° 5.

On ne passe pas de l'autre côté d'un équivalent pour l'addition.

Par exemple, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{n}$ mais $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \frac{1}{n}$ (car $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$). L'action de passer le 1 de l'autre côté n'est donc pas correcte.

Problème n° 6.

On ne supprime pas les constantes multiplicatives dans des équivalents.

Par exemple, $2n^2 \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n^2$ car $\frac{2n^2}{n^2}=2 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 2\neq 1$. Par contre, $o\left(2n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$ ou aussi $O\left(2n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(n^2\right)$

2 Les théorèmes de croissances comparées

Pour établir les différents théorèmes de croissances comparées, on a besoin d'un lemme :

Théorème 21. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers un certain réel ℓ élément de $[0,1[$. Alors, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Le réel $\varepsilon=\frac{1-\ell}{2}$ est strictement positif. Puisque la suite u ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$, $u_n\neq 0$ et $\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|-\ell\right|\leqslant\frac{1-\ell}{2}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|-\ell=\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|-|\ell|\leqslant\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\ell\right|\leqslant\frac{1-\ell}{2}$$

et donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leqslant\ell+\frac{1-\ell}{2}=\frac{1+\ell}{2}$. Pour $n\geqslant n_0+1$, on a

$$|u_n|=|u_{n_0}|\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}\leqslant|u_{n_0}|\prod_{k=n_0}^{n-1}\frac{1+\ell}{2}=|u_{n_0}|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Maintenant, $0\leqslant\frac{1+\ell}{2}<\frac{1+1}{2}=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_{n_0}|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

❏

Théorème 22 (les théorèmes de croissances comparées).

1) $\forall(\alpha,\alpha')\in\mathbb{R}^2$, $\alpha<\alpha'\Rightarrow n^{\alpha}\underset{+\infty}{\ll}n^{\alpha'}$.

2) $\forall(q,q')\in]0,+\infty[^2$, $q<q'\Rightarrow q^n\underset{+\infty}{\ll}q'^n$.

3) $\forall(\alpha,q)\in\mathbb{R}\times]1,+\infty[$, $n^{\alpha}\underset{+\infty}{\ll}q^n$ et $\forall(\alpha,q)\in\mathbb{R}\times]0,1[$, $q^n\underset{+\infty}{\ll}n^{\alpha}$.

4) $\forall q\in]0,+\infty[$, $q^n\underset{+\infty}{\ll}n!$.

5) $n!\underset{+\infty}{\ll}n^n$.

Démonstration .

1) Soit $(\alpha,\alpha')\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha<\alpha'$. Alors $\alpha-\alpha'<0$ puis

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha'}}=n^{\alpha-\alpha'}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

et donc $n^{\alpha}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(n^{\alpha'}\right)$.

2) Soit $(q,q')\in]0,+\infty[^2$ tel que $q<q'$. Alors $0<\dfrac{q}{q'}<1$ puis

$$\frac{q^n}{q'^n}=\left(\frac{q}{q'}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

et donc $q^n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(q'^n\right)$.

3) Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $q\in]1,+\infty[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\dfrac{n^{\alpha}}{q^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\times\frac{q^n}{q^{n+1}}=\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

On en déduit que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $\dfrac{1}{q}\in[0,1[$ puis que u_n tend vers 0 d'après le théorème 21. Ceci montre que $n^{\alpha}\underset{+\infty}{\ll}q^n$.
Si $q\in]0,1[$, alors $\dfrac{1}{q}\in]1,+\infty[$ et d'après ce qui précède, $\dfrac{1}{n^{\alpha}}=n^{-\alpha}\underset{+\infty}{\ll}\dfrac{1}{q^n}$ et donc $q^n\underset{+\infty}{\ll}n^{\alpha}$.

4) Soit $q\in]0,+\infty[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\dfrac{q^n}{n!}$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{q^{n+1}}{q^n}\times\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{q}{n+1}.$$

On en déduit que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $0\in[0,1[$ puis que u_n tend vers 0 d'après le théorème 21. Ceci montre que $q^n\underset{+\infty}{\ll}n!$.

5) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{n!}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)\times n^n}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

De plus, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e^{-1+o(1)}$ et donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ tend vers $\dfrac{1}{e}$. Ainsi, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $\dfrac{1}{e}\in[0,1[$ puis u_n tend vers 0 d'après le théorème 21. Ceci montre que $n!\underset{+\infty}{\ll}n^n$.

❏

Ainsi, par exemple,

$$1\underset{+\infty}{\ll}\ln(\ln n)\underset{+\infty}{\ll}\ln n\underset{+\infty}{\ll}\ln^2 n\underset{+\infty}{\ll}\sqrt{n}\underset{+\infty}{\ll}n\underset{+\infty}{\ll}n\ln n\underset{+\infty}{\ll}n^{\frac{3}{2}}\underset{+\infty}{\ll}n^2\underset{+\infty}{\ll}(1,01)^n\underset{+\infty}{\ll}2^n\underset{+\infty}{\ll}n!\underset{+\infty}{\ll}n^n$$

et aussi

$$\frac{1}{n^n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{n!}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{2^n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{(1,01)^n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{n^2}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{n\ln n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{\ln^2 n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{\ln n}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{\ln(\ln n)}\underset{+\infty}{\ll}1.$$

3 Quelques applications des relations de comparaison

3.1 Calculs de limites

On a le résultat suivant :

Théorème 23. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Si (u_n) converge vers un certain $\ell \in \mathbb{C}$, alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Supposons de plus que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réelles.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration .

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{C}$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors,

$$v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \times \ell = \ell.$$

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors,

$$v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

❑

A titre d'exemple, déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)\sqrt{3n+1}}$.

- $\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$.
- $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.
- $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
- $\ln^2\left(\dfrac{n^2+3}{n^2}\right) = \ln^2\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{3}{n^2}\right)^2 = \dfrac{9}{n^4}$.
- $\sqrt{3n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3n}$.

Donc,

$$\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)\sqrt{3n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{9}{n^4}\times\sqrt{3n}} = \frac{1}{18\sqrt{3}}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)\sqrt{3n+1}} = \dfrac{1}{18\sqrt{3}}$.

3.2 Etudes de signes au voisinage de $+\infty$

On a le résultat suivant :

Théorème 24. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors pour n suffisamment grand, à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont même signe.

Démonstration . Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. En particulier, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ et donc u_n et v_n ont même signe.

❏

Par exemple, on démontrera dans le prochain chapitre que $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Par suite,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{6n^3} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On en déduit que $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3} > 0$ puis que pour n suffisamment grand, $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) > \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

