# Planche n° 23. Arithmétique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

**Exercice n° 1 (** I)**

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (suite de FIBONACCI).

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n$ et $F_{n+1}$ sont des entiers premiers entre eux.

**Exercice n° 2 (**)**

**1)** Soit $p$ un nombre premier. Résoudre sans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = \widehat{1}$.

**2)** Même question dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

**3)** Résoudre dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ l'équation $x^7 = \widehat{1}$.

**Exercice n° 3 (**)**

Montrer que $\widehat{223}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/418\mathbb{Z}, +, \times)$ et déterminer son inverse.

**Exercice n° 4 (**)**

**1)** Résoudre dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ le système $\left\{\begin{array}{l}\widehat{3}x + \widehat{4}y = \widehat{0}\\ \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{5}\end{array}\right.$ .

**2)** Résoudre le même système dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

**Exercice n° 5 (*** I)**

On note $\varphi$ l'indicatrice d'EULER : pour tout $n \geqslant 2$, $\varphi(n) = \text{card}\{k \in [\![1, n]\!] / \ k \wedge n = 1\} = \text{card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\right)$.

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout diviseur $d$ en $n$, on pose $E_d = \{k \in [\![1, n]\!] / \ k \wedge n = d\}$.

**1)** Déterminer le cardinal de $E_d$.

**2)** En déduire que $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

**Exercice n° 6 (**)**

Soit $m \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $m$ entiers naturels consécutifs qui ne sont pas des nombres premiers.

**Exercice n° 7 (***)**

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p$ un nombre premier impair divisant $n^2 + 1$. Montrer que $p \equiv 1$ [4].

**2)** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4K + 1$, $K \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice n° 8 (**)**

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\left\{\begin{array}{l}x \equiv 4\ [9]\\ x \equiv 2\ [13]\end{array}\right.$ .

**Exercice n° 9 (*)**

Montrer que $5^{657} - 5$ est divisible par 12.