

Chapitre 22. Fractions rationnelles

Plan du chapitre

1 Définition de $\mathbb{K}(X)$	page 2
1.1 Le corps $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$	page 2
1.2 Forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle	page 2
1.3 Degré d'une fraction rationnelle	page 3
1.4 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle non nulle	page 4
1.5 Fonctions rationnelles	page 4
1.6 Dérivée d'une fraction rationnelle	page 5
2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle non nulle sur un corps	page 5
2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle	page 6
2.2 Partie polaire relative à un pôle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$	page 7
2.3 Décomposition sur \mathbb{C}	page 8
2.3.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle non nulle sur \mathbb{C}	page 8
2.3.2 Partie polaire relative à un pôle simple	page 9
2.3.3 Partie polaire relative à un pôle multiple	page 11
2.3.4 Utilisation de la parité de F	page 13
2.3.5 Utilisation de la réalité de F	page 14
2.3.6 Un exemple de décomposition sur \mathbb{C}	page 15
2.4 Décomposition sur \mathbb{R}	page 17
2.2.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle non nulle sur \mathbb{R}	page 17
2.2.2 Exemples de décompositions sur \mathbb{R}	page 19

1 Définition de $\mathbb{K}(X)$

1.1 Le corps $(\mathbb{K}(X), +, \times)$

Le programme officiel ne prévoit pas la construction du corps des fractions rationnelles. Cette construction est un cas particulier d'une construction plus générale, celle du corps des fractions d'un anneau intègre (la construction de $\mathbb{K}(X)$ à partir de $\mathbb{K}[X]$ est la même que la construction de \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z}), notion qui n'est pas davantage au programme des classes préparatoires. Nous admettrons donc toute la mise en place de ce paragraphe. Dans ce qui suit, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

- (« définition » de $\mathbb{K}(X)$.) Il existe un corps commutatif noté $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ et appelé **corps des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K}** . Les éléments de $\mathbb{K}(X)$, appelés fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K} , sont de la forme $\frac{A}{B}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

- (égalité de deux fractions rationnelles.) Pour A_1 et A_2 éléments de $\mathbb{K}[X]$ et B_1 et B_2 éléments de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1 B_2 = B_1 A_2.$$

- (opérations dans $\mathbb{K}(X)$.)

- L'addition dans $\mathbb{K}(X)$ est définie par : $\forall (A_1, A_2, B_1, B_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$,

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{B_1 B_2}.$$

- La multiplication dans $\mathbb{K}(X)$ est définie par : $\forall (A_1, A_2, B_1, B_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$,

$$\frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2}.$$

Avec ces deux opérations, $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif (l'inverse d'une fraction rationnelle non nulle $F = \frac{A}{B}$ est $\frac{1}{F} = \frac{B}{A}$).

- (plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.) Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, on identifie la fraction rationnelle $\frac{A}{1}$ et le polynôme A . On a donc $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

- (simplification.) $\forall (A, B, C) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\frac{CA}{CB} = \frac{A}{B}$. (En effet, $CA \times B = CB \times A$.)

Ainsi, $\frac{1}{X-1}$ ou $3X^2 - 7$ ou $\frac{X^2 - 3X + 2}{X-1}$ ou 1 ou 0 sont des fractions rationnelles et par exemple,

$$\frac{X^2 - 3X + 2}{X+3} \times \frac{(X+3)^2}{X^2 - 4X + 3} = \frac{(X-1)(X-2)(X+3)^2}{(X+3)(X-1)(X-3)} = \frac{(X-2)(X+3)}{X-3} = \frac{X^2 - X - 6}{X-3}.$$

1.2 Forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle

Théorème 1. Soit $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$. Il existe un couple de polynômes non nuls (A, B) et un seul tel que

$$F = \frac{A}{B} \text{ et } A \wedge B = 1 \text{ et } \text{dom}(B) = 1.$$

DÉMONSTRATION.

Existence. Soient $(A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ puis $F = \frac{A}{B}$. On sait que l'on peut écrire $A = DA_1$ et $B = DB_1$ où $D = A \wedge B$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$. On a alors

$$F = \frac{A}{B} = \frac{DA_1}{DB_1} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_1/\text{dom}(B_1)}{B_1/\text{dom}(B_1)}.$$

Posons $A_2 = \frac{1}{\text{dom}(B_1)} A_1$ et $B_2 = \frac{1}{\text{dom}(B_1)} B_1$. A_2 et B_2 sont deux polynômes non nuls, premiers entre eux avec B_2 unitaire tels que $F = \frac{A_2}{B_2}$.

Unicité. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 , quatre polynômes non nuls tels que $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ et $A_1 \wedge B_1 = A_2 \wedge B_2 = 1$ et $\text{dom}(B_1) = \text{dom}(B_2) = 1$.

On a donc $A_1B_2 = A_2B_1$. Par suite, le polynôme B_1 divise le polynôme A_1B_2 et les polynômes A_1 et B_1 sont premiers entre eux. D'après le théorème de GAUSS, B_1 divise B_2 . De même, B_2 divise B_1 et donc, il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $B_2 = \lambda B_1$. Puisque B_1 et B_2 sont unitaires, on en déduit que $\lambda = 1$ puis que $B_2 = B_1$.

On a donc $A_1B_1 = A_2B_1$ puis, après simplification par le polynôme non nul B_1 , on obtient $A_1 = A_2$. □

DÉFINITION 1. Soit F une fraction rationnelle non nulle. L'écriture

$$F = \frac{A}{B} \text{ avec } (A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2 \text{ et } A \wedge B = 1 \text{ et } \text{dom}(B) = 1$$

s'appelle la **forme irréductible** de la fraction rationnelle non nulle F .

Exemple. Soit $F = \frac{X^2 - X - 6}{2X^2 - 7X + 3}$. On a

$$F = \frac{(X-3)(X+2)}{(2X-1)(X-3)} = \frac{X+2}{2X-1} = \frac{\frac{X}{2} + 1}{X - \frac{1}{2}}$$

La forme irréductible de F est $\frac{\frac{X}{2} + 1}{X - \frac{1}{2}}$. □

Exercice 1. Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle sous forme irréductible.

Montrer que F est paire si et seulement si A et B sont pairs.

Solution 1. F paire $\Rightarrow F(-X) = F(X) \Rightarrow \frac{A(-X)}{B(-X)} = \frac{A(X)}{B(X)} \Rightarrow A(X)B(-X) = A(-X)B(X)$.

Les polynômes A et B sont premiers entre eux et donc sans racine commune dans \mathbb{C} . Mais alors, les polynômes $A(-X)$ et $B(-X)$ sont sans racine commune dans \mathbb{C} et donc premiers entre eux (on peut aussi utiliser le théorème de BÉZOUT : il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$ mais alors $A(-X)U(-X) + B(-X)V(-X) = 1$).

$B(-X)$ divise $A(X)B(-X) = A(-X)B(X)$ et est premier à $A(-X)$. Donc, le polynôme $B(-X)$ divise le polynôme $B(X)$ d'après le théorème de GAUSS. De même, le polynôme $B(X)$ divise le polynôme $B(-X)$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $B(-X) = \lambda B(X)$. De plus,

$$\lambda = \text{dom}(\lambda B) = \text{dom}(B(-X)) = (-1)^n,$$

où $n = \text{deg}(B)$. Donc, $B(-X) = (-1)^n B(X)$. On en déduit encore $A(X)(-1)^n B(X) = A(-X)B(X)$ puis $A(-X) = (-1)^n A(X)$. Ainsi, les polynômes A et B sont, ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs.

Mais si les polynômes A et B sont tous deux impairs, les polynômes A et B sont tous deux divisibles par le polynôme X ce qui contredit le fait que A et B sont premiers entre eux. Donc, si F est paire, alors les polynômes A et B sont tous deux pairs.

La réciproque est immédiate.

1.3 Degré d'une fraction rationnelle

Avant de définir le degré d'une fraction rationnelle, il faut prendre quelques précautions. Soit F une fraction rationnelle nulle ou pas. Soient A_1, B_1, A_2 et B_2 quatre polynômes, B_1 et B_2 étant non nuls tels que $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. On a donc $A_1B_2 = A_2B_1$ puis $\text{deg}(A_1) + \text{deg}(B_2) = \text{deg}(A_2) + \text{deg}(B_1)$ (*).

Si $A_1 \neq 0$, alors $A_2 \neq 0$ puis $\text{deg}(A_1)$ et $\text{deg}(A_2)$ sont des entiers. L'égalité (*) peut alors s'écrire

$$\text{deg}(A_1) - \text{deg}(B_1) = \text{deg}(A_2) - \text{deg}(B_2).$$

Dit autrement, quand $F = \frac{A}{B} \neq 0$, l'entier relatif $\text{deg}(A) - \text{deg}(B)$ ne dépend pas du choix d'un **représentant** $\frac{A}{B}$ de F .

Si $A_1 = 0$, alors $A_2 = 0$ (car $B_1 \neq 0$) et encore une fois $\deg(A_1) - \deg(B_1) = -\infty = \deg(A_2) - \deg(B_2)$ (car $\deg(B_1)$ et $\deg(B_2)$ sont des entiers).

On peut donc poser :

DÉFINITION 2. Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, puis $F = \frac{A}{B}$.

Le **degré** de F est $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$. Si $F \neq 0$, $\deg(F) \in \mathbb{Z}$ et si $F = 0$, $\deg(F) = -\infty$.

Par exemple, $\deg\left(\frac{2X+1}{X^3-X+7}\right) = -2$.

On note que si $F = \frac{P}{1} = P$ est un polynôme, $\deg(F) = \deg(P) - 0 = \deg(P)$ et donc les notions de degré coïncident.

La notion de degré d'une fraction rationnelle est peu ou pas utilisée en classe préparatoire contrairement à la notion de degré d'un polynôme. On peut montrer que les règles usuelles sur les degrés des polynômes restent valables pour les fractions rationnelles : $\deg(F_1 + F_2) \leq \max\{\deg(F_1), \deg(F_2)\}$, $\deg(F_1 \times F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$, ...

1.4 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle non nulle

DÉFINITION 3. Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle sous forme irréductible.

Un **zéro** de la fraction rationnelle F est une racine du numérateur A . L'ordre de multiplicité de ce zéro est son ordre de multiplicité en tant que racine de A .

Un **pôle** de la fraction rationnelle F est une racine du dénominateur B . L'ordre de multiplicité de ce pôle est son ordre de multiplicité en tant que racine de B .

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine simple de B , on dit que α est un **pôle simple** de F .

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre 2 (resp. 3, ...) de B , on dit que α est un **pôle double** (resp. **triple** ...) de F .

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre au moins égal à 2 de B , on dit que α est un **pôle multiple** de F .

Considérons par exemple la fraction rationnelle $F = \frac{(X-1)(X-2)}{(X-1)(X-3)(X-4)^2}$. Avant de parler de zéros ou de pôles, on met d'abord F sous forme irréductible : $F = \frac{X-2}{(X-3)(X-4)^2}$. Ceci fait, on peut lire que F admet 2 pour zéro d'ordre 1, 3 pour pôle simple, 4 pour pôle double et que 1 n'est ni zéro, ni pôle de F .

La fraction rationnelle $F = \frac{X^4-1}{X^3-1}$ admet quant à elle -1 , i et $-i$ pour zéros et j et j^2 pour pôles mais 1 n'est ni zéro, ni pôle de F .

1.5 Fonctions rationnelles

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle mise sous forme irréductible. On note \mathcal{P} l'ensemble de ses pôles. On associe à F la **fonction rationnelle** \tilde{F} définie sur $\mathbb{K} \setminus \mathcal{P}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}, \tilde{F}(x) = \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

(Ainsi, réapparaît très momentanément la notation \sim). Soient alors $F_1 = \frac{A_1}{B_1}$ et $F_2 = \frac{A_2}{B_2}$ deux fractions rationnelles non nulles mises sous forme irréductible. On a bien sûr : $F_1 = F_2 \Rightarrow \tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ mais rien ne dit que $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 \Rightarrow F_1 = F_2$. C'est ce que l'on va démontrer.

On note \mathcal{P}_1 (resp. \mathcal{P}_2) l'ensemble des pôles de F_1 (resp. F_2). \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont des ensembles finis et il en est de même de $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Mais alors, $\mathbb{K} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ est un ensemble infini et donc

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{K} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2), \frac{A_1(x)}{B_1(x)} = \frac{A_2(x)}{B_2(x)} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{K} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2), A_1(x)B_2(x) = A_2(x)B_1(x) \\ &\Rightarrow A_1B_2 = A_2B_1 \text{ (polynômes coïncidant en une infinité de valeurs)} \\ &\Rightarrow F_1 = F_2. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut confondre les notions de fraction rationnelle et de fonction rationnelle et laisser tomber la notation \tilde{F} . C'est ce que nous ferons dorénavant.

Par exemple, on écrira au choix $F = \frac{X^2 + 1}{X - 1}$ ou $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, F(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ (la première présentation étant plus pratique à manipuler que la deuxième).

1.6 Dérivée d'une fraction rationnelle

On veut définir la dérivée formelle d'une fraction rationnelle.

DÉFINITION 3. Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle mise sous forme irréductible.

La **dérivée** de F est la fraction rationnelle

$$F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}.$$

Plus généralement, la **dérivée n-ème** de F , notée $F^{(n)}$, est définie par récurrence par :

$$F^{(0)} = F \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, F^{(n)} = \left(F^{(n-1)}\right)'.$$

On peut montrer, et nous l'admettons, que cette dérivation obéit aux règles usuelles de dérivation : $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G'$, $(F \times G)' = F'G + FG'$, $\left(\frac{1}{F}\right)' = -\frac{F'}{F^2}$, ...

On doit savoir calculer les dérivées successives de $\frac{1}{X - a}$, $a \in \mathbb{K}$. $\left(\frac{1}{X - a}\right)' = \frac{(-1)}{(X - a)^2}$ puis $\left(\frac{1}{X - a}\right)'' = \frac{(-1)(-2)}{(X - a)^3}$ puis $\left(\frac{1}{X - a}\right)^{(3)} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(X - a)^4}$ et plus généralement, par récurrence,

$$\forall a \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{X - a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X - a)^{n+1}}.$$

Exercice 2. Calculer la dérivée n-ème de $F = \frac{1}{X^2 + 1}$.

Solution 2. $\frac{1}{X^2 + 1} = \frac{1}{(X - i)(X + i)} = \frac{1}{2i} \times \frac{(X + i) - (X - i)}{(X - i)(X + i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{X - i} - \frac{1}{X + i}\right)$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{X^2 + 1}\right)^{(n)} &= \frac{1}{2i} \left(\left(\frac{1}{X - i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X + i}\right)^{(n)} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{(-1)^n n!}{(X - i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(X + i)^{n+1}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i} \frac{(X + i)^{n+1} - (X - i)^{n+1}}{(X^2 + 1)^{n+1}} = (-1)^n n! \frac{\text{Im}((X + i)^{n+1})}{(X^2 + 1)^{n+1}} \\ &= (-1)^n n! \frac{\binom{n+1}{1} X^n - \binom{n+1}{3} X^{n-2} + \binom{n+1}{5} X^{n-4} - \dots}{(X^2 + 1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle non nulle sur un corps

Essayons de déterminer les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. Si F reste écrite sous cette forme, le problème semble difficile à résoudre mais si nous écrivons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(X+1)(X+2)} &= \frac{1}{2} \times \frac{(X+2) - X}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X(X+1)} - \frac{1}{(X+1)(X+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(X+1) - X}{X(X+1)} - \frac{(X+2) - (X+1)}{(X+1)(X+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} \right) - \left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}, \end{aligned}$$

on voit qu'une primitive de F sur $]0, +\infty[$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) = \ln \left(\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1} \right)$. Ceci a été rendu possible en écrivant F comme combinaison linéaire de fonctions beaucoup plus simple.

Nous allons maintenant systématiser cette démarche et apprendre à décomposer une fraction rationnelle en « éléments simples » en mettant en place des techniques pour y parvenir de manière systématique. (La technique mise en œuvre dans l'exemple ci-dessus n'est ni anecdotique, ni de portée générale).

Les deux premiers paragraphes (« Partie entière d'une fraction rationnelle » et « partie polaire relative à un pôle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ ») constituent une préparation théorique à la décomposition. L'aspect pratique de la décomposition est analysé plus loin.

2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Théorème 2. Soit F un élément de $\mathbb{K}(X)$.

F s'écrit de manière unique sous la forme $F = E + G$ où E est un polynôme et G une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

DÉMONSTRATION.

Existence. Si $F = 0$, on écrit $F = E + G$ avec $E = 0 \in \mathbb{K}[X]$ et $G = 0$ qui est une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Dorénavant F est non nulle.

Posons $F = \frac{A}{B}$ où $(A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$. La division euclidienne de A par B s'écrit $A = BQ + R$ où $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\deg(R) < \deg(B)$. Après division des deux membres de l'égalité $A = BQ + R$ par le polynôme non nul B , on obtient

$$F = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Puisque $\deg(R) < \deg(B)$, le polynôme $E = Q$ et la fraction rationnelle $G = \frac{R}{B}$ conviennent.

Unicité. Supposons que $F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2$ où E_1 et E_2 sont deux polynômes et G_1 et G_2 sont deux fractions rationnelles de degré strictement négatif. Alors, $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$ avec $\deg(G_2 - G_1) \leq \max\{\deg(G_1), \deg(G_2)\} < 0$. Le seul polynôme de degré strictement négatif est le polynôme nul. Donc, $E_1 - E_2 = 0$ puis $G_2 - G_1 = 0$. □

DÉFINITION 4. Le polynôme E du théorème 2 s'appelle la **partie entière** de la fraction rationnelle F .

Ainsi, quand la fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$ est non nulle, sa partie entière E est le quotient de la division euclidienne de A par B . On note que le degré de cette partie entière est :

$$\deg(E) = \begin{cases} \deg(F) & \text{si } \deg(F) \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \deg(F) < 0 \end{cases}.$$

Exemple. Soit $F = \frac{X^3 + X - 3}{(X-1)(X-2)}$. La division euclidienne du numérateur A par le dénominateur B s'écrit (on développe d'abord le dénominateur avant de poser la division) :

$$\begin{array}{r|l} X^3 + & + X - 3 & X^2 - 3X + 2 \\ & & \hline & 3X^2 - X - 3 & X + 3 \\ & & \hline & 8X - 9 & \end{array}$$

ce qui fournit

$$F = \frac{(X+3)(X^2-3X+2) + 8X-9}{X^2-3X+2} = X+3 + \frac{8X-9}{X^2-3X+2}.$$

La partie entière de F est $X+3$. On peut aussi effectuer cette division en ligne :

$$\begin{aligned} \frac{X^3+X-3}{(X-1)(X-2)} &= \frac{X^3-3X^2+2X+3X^2-X-3}{X^2-3X+2} = \frac{X(X^2-3X+2)+3X^2-X-3}{X^2-3X+2} \\ &= \frac{X(X^2-3X+2)+3X^2-9X+6+8X-9}{X^2-3X+2} = \frac{X(X^2-3X+2)+3(X^2-3X+2)+8X-9}{X^2-3X+2} \\ &= X+3 + \frac{8X-9}{X^2-3X+2}. \end{aligned}$$

2.2 Partie polaire relative à un pôle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème 3. Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle non nulle mise sous forme irréductible. On suppose que $a \in \mathbb{K}$ est pôle de F d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ ou encore on suppose que $Q = (X-a)^n Q_1$ où Q_1 est un polynôme unitaire tel que $Q_1(a) \neq 0$.

Alors, F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + F_1,$$

où les λ_k sont des éléments de \mathbb{K} , λ_n étant non nul, et F_1 est une fraction rationnelle dont a n'est plus pôle.

DÉMONSTRATION .

Existence. Q_1 n'admet pas a pour racine et donc $Q_1 \wedge (X-a) = 1$ puis $Q_1 \wedge (X-a)^n = 1$. D'après le théorème de BÉZOUT, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $Q_1 U + (X-a)^n V = 1$ puis $P Q_1 U + P(X-a)^n V = P$. On obtient :

$$F = \frac{P}{(X-a)^n Q_1} = \frac{P Q_1 U + P(X-a)^n V}{(X-a)^n Q_1} = \frac{P U}{(X-a)^n} + \frac{P V}{Q_1}.$$

Ensuite, la formule de TAYLOR appliquée au polynôme $A = P U$ s'écrit $A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k + (X-a)^n A_1$ où A_1 est un polynôme et fournit :

$$\begin{aligned} \frac{P U}{(X-a)^n} &= \frac{A}{(X-a)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^{k-n} + A_1 \\ &= \frac{A^{(n-1)}(a)/(n-1)!}{X-a} + \dots + \frac{A'(a)/1!}{(X-a)^{n-1}} + \frac{A(a)}{(X-a)^n} + A_1. \end{aligned}$$

On pose $\lambda_1 = \frac{A^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}, \dots, \lambda_{n-1} = \frac{A'(a)}{1!}, \lambda_n = A(a)$ et $F_1 = A_1 + \frac{P V}{Q_1}$ et on a

$$F = \frac{\lambda_1}{X-a} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n} + F_1$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de \mathbb{K} et F_1 est une fraction rationnelle n'admettant pas a pour pôle. Enfin, si $\lambda_n = 0$, alors en réduisant au même dénominateur, F s'écrit sous la forme $\frac{A_1}{(X-a)^{n-1} Q_1}$, où A_1 est un polynôme et $Q_1(a) \neq 0$, et n'admet donc pas a pour pôle d'ordre n .

Unicité. Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles n'admettant pas a pour pôle et $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n, 2n$ éléments de \mathbb{K} tels que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + F_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{(X-a)^k} + F_2.$$

Supposons par l'absurde $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Soit $p = \text{Max}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \neq \mu_k\}$. Par définition

$$\sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + F_1 = \sum_{k=1}^p \frac{\mu_k}{(X-a)^k} + F_2.$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $(X-a)^p$ et on obtient

$$\lambda_p + \sum_{k=1}^p \lambda_k (X-a)^{p-k} + (X-a)^p F_1 = \mu_p + \sum_{k=1}^p \mu_k (X-a)^{p-k} + (X-a)^p F_2.$$

En évaluant ces deux membres en a et en tenant compte du fait que F_1 et F_2 n'admettent pas a pour pôle, on obtient $\lambda_p = \mu_p$ ce qui contredit la définition de p . Donc, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ puis $F_1 = F_2$. □

⇒ **Commentaire.** La méthode pour obtenir les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, (théorème de BÉZOUT puis formule de TAYLOR) n'est pas la méthode la plus efficace. Mais « la » bonne méthode ne peut plus être exposée aujourd'hui car un outil a disparu des programmes officiels il y a plusieurs années : la division suivant les puissances croissantes. Cet outil donnait directement les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

DÉFINITION 5. La fraction rationnelle $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(X-a)^k}$ du théorème précédent est la **partie polaire de F relative au pôle a**.

Exemple. Soit $F = \frac{X^4 + 1}{X^2(X-1)}$. La partie entière de F est fournie par la division euclidienne de $X^4 + 1$ par $X^3 - X^2$: $X^4 + 1 = (X+1)(X^3 - X^2) + X^2 + 1$ et fournit

$$\begin{aligned} \frac{X^4 + 1}{X^2(X-1)} &= X + 1 + \frac{X^2 + 1}{X^2(X-1)} = X + 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X^2(X-1)} \\ &= X + 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X^2 - (X+1)(X-1)}{X^2(X-1)} \text{ (égalité de BÉZOUT)} \\ &= X + 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-1} - \frac{X+1}{X^2} \\ &= X + 1 + \frac{2}{X-1} - \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}. \end{aligned}$$

La partie polaire relative au pôle simple 1 est $\frac{2}{X-1}$, la partie polaire relative au pôle double 0 est $-\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}$ et la partie entière est $X + 1$. On note que la manière de parvenir à cette décomposition n'est pas du tout au point. Des techniques simples et efficaces seront exposées dans les paragraphes suivants. □

2.3 Décomposition sur \mathbb{C}

2.3.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle non nulle sur \mathbb{C}

Théorème 4. Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle mise sous forme irréductible. On note a_1, \dots, a_p , les pôles deux à deux distincts de F et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs (donc $B = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i}$).

F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - a_i)^j} \right),$$

où E est un polynôme et les $\lambda_{i,j}$ sont des nombres complexes tels que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_{i,\alpha_i} \neq 0$.

DÉMONSTRATION .

Existence. On enlève à F sa partie polaire relative au pôle a_1 et on obtient, d'après le théorème 3, une fraction rationnelle admettant a_2, \dots, a_p pour pôles sans changer les ordres de multiplicité et plus a_1 . En réitérant, si on enlève à F chacune de ses parties polaires respectivement relatives aux pôles a_1, \dots, a_p , on obtient une fraction rationnelle n'admettant plus de pôles et donc on obtient un polynôme E .

Unicité. Supposons que F s'écrive sous la forme $E_1 + \sum_{i=1}^{p'} \left(\sum_{j=1}^{\alpha'_i} \frac{\lambda'_{i,j}}{(X - a'_i)^j} \right)$.

Puisque $\deg \left(\sum_{i=1}^{p'} \left(\sum_{j=1}^{\alpha'_i} \frac{\lambda'_{i,j}}{(X - \alpha'_i)^j} \right) \right) < 0$, E_1 est nécessairement la partie entière E de F . Ensuite, il est clair que les α'_i sont nécessairement les pôles de F et en particulier $p' = p$.

Enfin, puisque pour chaque $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $F - E - \sum_{j=1}^{\alpha'_i} \frac{\lambda'_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$ est une fraction rationnelle n'admettant plus α_i pour pôle, $\sum_{j=1}^{\alpha'_i} \frac{\lambda'_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}$ est nécessairement la partie polaire relative au pôle α_i . □

⇒ **Commentaire**.

◇ Dire que la décomposition est unique signifie que le polynôme E et les nombres $\lambda_{i,j}$ sont uniquement définis.

◇ Les fractions $\frac{\lambda}{(X - a)^n}$, $\lambda \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$, sont les **éléments simples**.

On se dirige maintenant vers l'aspect pratique de la décomposition. On commence par l'obtention de la partie polaire relative à un pôle simple.

2.3.2 Partie polaire relative à un pôle simple

Théorème 5. Soit $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - a)Q_1}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls premiers entre eux, $a \in \mathbb{K}$, Q_1 est un polynôme tel que $Q_1(a) \neq 0$. Soit $\frac{\lambda}{X - a}$ la partie polaire de F relative au pôle simple a .

Alors, $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ ou encore, si de plus, x et a sont réels, $\lambda = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)F(x)$.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - a)Q_1} = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{P_1}{Q_1}$ où P_1 est un certain polynôme. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $X - a$ et on obtient

$$\frac{P}{Q_1} = \lambda + \frac{(X - a)P_1}{Q_1}.$$

En évaluant en a , on obtient $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Maintenant, si x et a sont réels, $\frac{P(a)}{Q_1(a)}$ est aussi $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)F(x)$. □

⇒ **Commentaire.** Si x et a sont complexes, $\lim_{x \rightarrow a}$ n'a jamais été défini en maths sup (et ne sera pas défini avant la maths spé). Néanmoins, écrire $\lambda = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)F(x)$ même si x et a ne sont pas réels est le plus pratique pour rédiger une décomposition en éléments simples et on se le permettra dorénavant.

Théorème 6. Soit $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - a)Q_1}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls premiers entre eux, $a \in \mathbb{K}$, Q_1 est un polynôme tel que $Q_1(a) \neq 0$. Soit $\frac{\lambda}{X - a}$ la partie polaire de F relative au pôle simple a .

Alors, $\lambda = \frac{P(a)}{Q'_1(a)}$.

DÉMONSTRATION. $Q = (X - a)Q_1$ puis $Q' = Q_1 + (X - a)Q'_1$. En évaluant en a , on obtient $Q'(a) = Q_1(a)$ et donc $\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$. □

On a donc deux techniques pour obtenir λ et on choisira l'une ou l'autre en fonction des circonstances. C'est ce qu'analysent les deux exemples qui suivent.

Exemple 1. Décomposons en éléments simples la fraction $F = \frac{1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$. F est non nulle, sous forme irréductible. La partie entière de F est nulle et F admet trois pôles simples à savoir 1, 2 et 3. La décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} s'écrit :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}.$$

- $a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}.$
- $b = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \frac{1}{(2-1)(2-3)} = -1.$
- $c = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)F(x) = \frac{1}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}.$

Donc,

$$F = \frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{2(X-3)}.$$

Exemple 2. Décomposons en éléments simples la fraction $F = \frac{1}{X^3+1}$.

$X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1) = (X+1)(X+j)(X+j^2)$ (si $A = X^3+1$, alors $A(-X) = -X^3+1 = -(X^3-1)$ et donc les racines de X^3+1 sont les opposées des racines 1, j et j^2 de X^3-1).

La décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} s'écrit

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{c}{X+j^2}$$

où a , b et c sont trois nombres complexes. En posant $P = 1$ et $Q = X^3+1$ de sorte que $F = \frac{P}{Q}$, on a :

- $a = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}.$
- $b = \frac{P(-j)}{Q'(-j)} = \frac{1}{3(-j)^2} = \frac{j}{3}.$
- $c = \frac{P(-j^2)}{Q'(-j^2)} = \frac{1}{3(-j^2)^2} = \frac{j^2}{3}.$

Donc,

$$F = \frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2} \right).$$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $F_n = \frac{1}{X^n-1}$.

Décomposer F_n en éléments simples sur \mathbb{C} .

Solution 3. On pose $P_n = 1$ et $Q_n = X^n - 1$ de sorte que $F_n = \frac{P_n}{Q_n}$.

La fraction F_n est non nulle, sous forme irréductible, de partie entière nulle. On sait que le polynôme $X^n - 1$ est à racines simples dans \mathbb{C} : ses racines sont les n nombres $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. La décomposition en éléments simples de F_n sur \mathbb{C} s'écrit :

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k},$$

où les λ_k sont des nombres complexes. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\lambda_k = \frac{P_n(1)}{Q_n'(1)} = \frac{1}{n(\omega_k)^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k)^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

Par exemple, $\frac{1}{X^4-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{i}{X-i} - \frac{1}{X+1} - \frac{i}{X+i} \right).$

2.3.3 Partie polaire relative à un pôle multiple

Le programme officiel ne fournit aucune technique pour obtenir la partie polaire relative à un pôle multiple. Donc, on se débrouille comme on peut. Voici quelques exemples.

Exemple. Considérons la fraction rationnelle $F = \frac{1}{(X-1)^2(X-2)}$. Sa décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} s'écrit :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} \quad (*),$$

où a , b et c sont trois nombres complexes.

- Pour c , on a déjà la technique et on commence par $c : c = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1$. Il y a encore deux inconnues a et b .

- On peut obtenir b en généralisant la technique mise en œuvre pour un pôle simple : $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x)$. En effet,

$$\frac{1}{X-2} = (X-1)^2 F = a(X-1) + b + \frac{c(X-1)^2}{X-2}$$

et quand x tend vers 1, on obtient $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = -1$.

Une variante de la technique précédente (une fois que le chapitre « Analyse asymptotique », premier chapitre du second semestre aura eu lieu) sera $F(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{(x-1)^2}$ et aussi $F(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{b}{(x-1)^2}$. Donc, $b = -1$.

- A ce niveau de calcul, on a donc

$$\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-2} \quad (**).$$

Il ne manque plus que a . On peut obtenir a par (au moins) deux méthodes.

La première méthode consiste à évaluer en 0 les membres de l'égalité (**). On obtient $\frac{1}{(0-1)^2(0-2)} = -a - 1 - \frac{1}{2}$ et donc $a = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1$.

La deuxième méthode, la plus efficace, est, à partir de l'égalité (*),

$$a + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = 0$$

et donc $a = -c = -1$.

Finalement,

$$\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{1}{X-1} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-2}.$$

Exercice 4. Soit $n \geq 2$. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} la fraction rationnelle $F_n = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Solution 4. Posons $P_n = 1$ et $Q_n = (X-1)(X^n-1)$ de sorte que $F_n = \frac{P_n}{Q_n}$. La fraction rationnelle F_n est non nulle, sous forme irréductible et sa partie entière est nulle.

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, posons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Les ω_k sont deux à deux distincts et $\omega_0 = 1$ puis

$$Q_n = (X-1) \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k).$$

Donc, F_n admet 1 pour pôle double et les ω_k , $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, pour pôles simples. Sa décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} s'écrit :

$$F_n = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}.$$

• Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. $\lambda_k = \frac{P_n(\omega_k)}{Q'_n(\omega_k)}$. Or, $Q_n = (X-1)(X^n-1) = X^{n+1} - X^n - X + 1$ puis $Q'_n = (n+1)X^n - nX^{n-1} - 1$ et donc

$$\lambda_k = \frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \frac{1}{(n+1) - n\omega_k^{-1} - 1} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}.$$

• On a aussi $Q_n = (X-1)^2(X^{n-1} + \dots + X + 1)$ et donc

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{X^{n-1} + \dots + X + 1} = \frac{1}{n}.$$

• Il ne manque plus que a .

1ère idée. $F_n - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ et donc $a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(F_n(x) - \frac{1}{n(x-1)^2} \right)$. Or,

$$\begin{aligned} (X-1) \left(F_n - \frac{1}{n(X-1)^2} \right) &= (X-1) \left(\frac{1}{(X-1)^2(X^{n-1} + \dots + X + 1)} - \frac{1}{n(X-1)^2} \right) \\ &= \frac{n - (X^{n-1} + \dots + X + 1)}{n(X-1)(X^{n-1} + \dots + X + 1)} = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (X^k - 1)}{n(X-1)(X^{n-1} + \dots + X + 1)} \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^{n-1} (1 + X + \dots + X^{k-1})}{n(X^{n-1} + \dots + X + 1)} \end{aligned}$$

et donc

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\sum_{k=1}^{n-1} (1 + x + \dots + x^{k-1})}{n(x^{n-1} + \dots + x + 1)} = -\frac{\sum_{k=1}^{n-1} k}{n^2} = -\frac{n(n-1)/2}{n^2} = -\frac{n-1}{2n}.$$

2ème idée. $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF_n(x) = a + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k$ et donc $a = -\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k$. Il reste à calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k - 1}$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, posons $z_k = \frac{\omega_k}{\omega_k - 1}$. Les nombres $z_k = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega_k}}$ sont deux à deux distincts car les ω_k sont deux à

deux distincts et par injectivité de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $z_k = \omega_k(z_k - 1)$ puis $z_k^n = (z_k - 1)^n$. Les z_k sont donc $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme $A = X^n - (X-1)^n = nX^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots$. Puisque A est de degré $n-1$, les z_k sont toutes les racines de A . Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme fournissent en particulier

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k = -\frac{-\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$$

puis $a = -\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \frac{n-1}{2n}$.

Finalement,

$$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1}{n} \left(-\frac{n-1}{2(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k/(\omega_k-1)}{X-\omega_k} \right).$$

2.3.4 Utilisation de la parité de F

- Soit $F = \frac{1}{(X^2 - 1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Mais $F(-X) = F(X)$ ou encore F est paire. Sa décomposition s'écrit donc aussi

$$F(X) = F(-X) = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} = -\frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples permet d'identifier les coefficients, ce qui fournit $c = -a$ et $d = b$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

Le nombre de coefficients inconnus a été divisé par deux. Terminons les calculs.

- $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}$.

- En évaluant en 0 on obtient, $1 = -a + b - a + b = -2a + \frac{1}{2}$ et donc $a = -\frac{1}{4}$. Finalement,

$$\frac{1}{(X^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} \right).$$

On peut penser les choses autrement. Supposons avoir déterminé au départ, par une certaine méthode, la partie polaire relative au pôle 1 à savoir $\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} \right)$, on profite de l'égalité $F(-X) = F(X)$ en recopiant ensuite l'expression obtenue en remplaçant X par $-X$ dans $\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} \right)$. Ceci fournit

$$F = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{-X-1} + \frac{1}{(-X-1)^2} \right) = \dots$$

- Soit $F = \frac{X}{(X^2 - 1)^2}$. Sa décomposition en éléments simples de nouveau s'écrit

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Mais $F(-X) = -F(X)$ ou encore F est impaire. Sa décomposition s'écrit donc aussi

$$F(X) = -F(-X) = \frac{a}{X+1} - \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-1} - \frac{d}{(X-1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples permet d'identifier les coefficients, ce qui fournit $c = a$ et $d = -b$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{a}{X+1} - \frac{b}{(X+1)^2}.$$

- $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{4}$

- $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 2a$ et donc $a = 0$.

$$\frac{X}{(X^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2} \right).$$

2.3.5 Utilisation de réalité de F

Comme pour les polynômes, on a besoin ici de la notion de conjuguée d'une fraction rationnelle :

DÉFINITION 6. Soit $F = \frac{P}{Q}$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{C}[X] \setminus \{0\})$, un élément de $\mathbb{C}(X)$.

La **conjuguée** de la fraction rationnelle F est $\bar{F} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$.

$$\text{Ainsi, } \overline{\left(\frac{(1-i)X-1}{iX^2+3}\right)} = \frac{(1+i)X-1}{-iX^2+3}.$$

Au vu des propriétés de calcul du conjugué d'un polynôme, on a immédiatement

- $\forall (F, G) \in \mathbb{C}(X)^2, \overline{F+G} = \bar{F} + \bar{G}$.
- $\forall (F, \lambda) \in \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}, \overline{\lambda F} = \bar{\lambda} \bar{F}$.
- $\forall (F, G) \in \mathbb{C}(X)^2, \overline{F \times G} = \bar{F} \times \bar{G}$.
- $\forall F \in \mathbb{C}(X), \forall z \in \mathbb{C}, \overline{F(z)} = \bar{F}(\bar{z})$.

C'est un peu plus compliqué au niveau de la réalité de F :

Théorème 7. Soit $F = \frac{P}{Q}$ un élément non nul de $\mathbb{C}(X)$, **sous forme irréductible**.

$$F \in \mathbb{R}(X) \Leftrightarrow (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \Leftrightarrow \bar{F} = F.$$

DÉMONSTRATION . Si P et Q sont à coefficients réels, il est clair que $F \in \mathbb{R}(X)$ et que $\bar{F} = F$.

Réciproquement, supposons que F soit à coefficients réels, alors $\bar{F} = F$ puis $\frac{\bar{P}}{Q} = \frac{P}{Q}$. On en déduit encore que $P\bar{Q} = \bar{P}Q$. Ainsi, Q divise $P\bar{Q}$ et $Q \wedge P = 1$. Donc, Q divise \bar{Q} d'après le théorème de GAUSS. Maintenant, Q et \bar{Q} ont même degré et donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\bar{Q} = \lambda Q$. Enfin, Q et donc \bar{Q} sont unitaires et on en déduit que $\lambda = 1$ à partir de l'égalité des coefficients dominants. Par suite, $\bar{Q} = Q$. De l'égalité $P\bar{Q} = \bar{P}Q$, on déduit enfin $\bar{P} = P$. Ainsi, $\bar{P} = P$ et $\bar{Q} = Q$ et donc P et Q sont à coefficients réels.

Au passage, on a montré que P et Q sont à coefficients réels si et seulement si $\bar{F} = F$. □

Les fractions $F = \frac{(X+i)(X+1)}{(X+i)(X+2)}$ ou $\frac{0}{X+1+i}$ doivent convaincre que le théorème est faux si on enlève l'hypothèse « non nulle sous forme irréductible ».

On va maintenant voir sur un exemple comment on peut utiliser la réalité d'une fraction rationnelle pour simplifier sa décomposition.

Considérons la fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^4+1}$. F est sous forme irréductible et admet quatre pôles simples : $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $z_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $z_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$ (les quatre racines quatrième de -1 dans \mathbb{C}). On note que l'on peut aussi écrire $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = -e^{-\frac{i\pi}{4}} = -\bar{z}_1$, $z_3 = -e^{\frac{i\pi}{4}} = -z_1$ et $z_4 = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \bar{z}_1$. La décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} s'écrit donc

$$F = \frac{a}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{b}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{c}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{d}{X + e^{-\frac{i\pi}{4}}}.$$

Mais F est réelle (ou encore F est à coefficients réels) et donc $\bar{F} = F$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit aussi

$$F = \bar{F} = \frac{\bar{a}}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\bar{b}}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\bar{c}}{X + e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\bar{d}}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples permet d'identifier les coefficients ce qui fournit $d = \bar{c}$ et $b = \bar{a}$. En renommant ces coefficients, la décomposition s'écrit

$$F = \frac{a}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\bar{a}}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{b}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\bar{b}}{X + e^{-\frac{i\pi}{4}}}.$$

On note que F est également paire et donc $b = -a$. Finalement, il n'y a plus qu'une inconnue, le nombre a.

$$F = \frac{a}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{\bar{a}}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} - \frac{a}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}} - \frac{\bar{a}}{X + e^{-\frac{i\pi}{4}}}.$$

Terminons la décomposition : $a = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{z_1}{4}$ et donc

$$F = \frac{1}{4} \left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{X + e^{-\frac{i\pi}{4}}} \right).$$

2.3.6 Un exemple de décomposition sur \mathbb{C}

Décomposons en éléments simples sur \mathbb{C} la fraction $F = \frac{X^{10}}{(X^2 - 1)^2 (X^4 + X^2 + 1)}$.

On pose $P = X^{10}$ et $Q = (X^2 - 1)^2 (X^4 + X^2 + 1)$ de sorte que $F = \frac{P}{Q}$.

• F est sous forme irréductible car 0 n'est pas racine du dénominateur.

• La partie entière de F est de degré $10 - 8 = 2$.

$Q = (X - 1)^2 (X + 1)^2 (X^2 + X + 1) (X^2 - X + 1) = (X - 1)^2 (X + 1)^2 (X - j) (X - j^2) (X + j) (X + j^2)$. F est réelle et paire et donc la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} s'écrit

$$F = aX^2 + b + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{(X - 1)^2} - \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2} + \frac{e}{X - j} + \frac{\bar{e}}{X - j^2} - \frac{e}{X + j} - \frac{\bar{e}}{X + j^2}.$$

• Détermination de la partie entière. $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^2} = 1$ et donc $\boxed{a = 1}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} F - X^2 &= \frac{X^{10} - X^2 (X^2 - 1)^2 (X^4 + X^2 + 1)}{(X^2 - 1)^2 (X^4 + X^2 + 1)} = \frac{X^{10} - X^2 (X^4 - 2X^2 + \dots) (X^4 + X^2 + \dots)}{(X^2 - 1)^2 (X^4 + X^2 + 1)} \\ &= \frac{X^{10} - X^{10} + X^8 + \dots}{(X^2 - 1)^2 (X^4 + X^2 + 1)} \end{aligned}$$

Donc, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{x^8} = 1$ puis $\boxed{b = 1}$.

• Détermination de la partie polaire relative au pôle j . En tenant compte de $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$ (et donc aussi $\frac{1}{j^2} = j$),

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow j} (x - j)F(x) = \frac{j^{10}}{(j^2 - 1)^2 (j - j^2) (j + j) (j + j^2)} = \frac{j}{(j - 2j^2 + 1) j (1 - j) (2j)(-1)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(-j^2 - 2j^2) j (1 - j)} = \frac{1}{6(1 - j)} = \frac{1 - j^2}{6(1 - j)(1 - j^2)} \\ &= \frac{1 - j^2}{18}. \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{e = \frac{1 - j^2}{18}}$.

• Détermination de la partie polaire relative au pôle 1 .

$$d = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 F(x) = \frac{1}{(1 + 1)^2 (1 + 1 + 1)} = \frac{1}{12}.$$

Donc, $\boxed{d = \frac{1}{12}}$. Enfin $x = 0$ fournit

$$\begin{aligned} 0 &= b - 2c + 2d - \frac{e}{j} - \frac{\bar{e}}{j^2} - \frac{e}{j} - \frac{\bar{e}}{j^2} = 1 - 2c + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} \left(2\frac{1 - j^2}{j} + 2\frac{1 - j}{j^2} \right) \\ &= -2c + \frac{7}{6} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{j} - j + j - \frac{1}{j} \right) \end{aligned}$$

et donc $c = \frac{7}{12}$. Finalement,

$$F = X^2 + 1 + \frac{7}{12(X-1)} + \frac{1}{12(X-1)^2} - \frac{7}{12(X+1)} + \frac{1}{12(X+1)^2} + \frac{1}{18} \left(\frac{1-j^2}{X-j} + \frac{1-j}{X-j^2} - \frac{1-j^2}{X+j} - \frac{1-j}{X+j^2} \right).$$

Terminons maintenant le paragraphe consacré à la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} par un résultat général :

Théorème 8. (décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$)

1) Si $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et z_1, \dots, z_n , sont des nombres complexes pas nécessairement deux à deux distincts, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}.$$

2) Si $P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - z_k)^{\alpha_k}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, z_1, \dots, z_p , sont des nombres complexes deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, sont des entiers naturels non nuls, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{X - z_k} \text{ (décomposition en éléments simples de } \frac{P'}{P} \text{)}.$$

DÉMONSTRATION.

1) $P' = \lambda \sum_{k=1}^n (X - z_k)' \prod_{i \neq k} (X - z_i) = \sum_{k=1}^n \lambda \prod_{i \neq k} (X - z_i) = \sum_{k=1}^n \frac{P}{X - z_k}$ et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}.$$

2) A partir de la formule précédente, en regroupant les fractions de même dénominateur, on obtient

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{X - z_k}.$$

On peut aussi écrire directement

$$P' = \lambda \sum_{k=1}^p ((X - z_k)^{\alpha_k})' \prod_{i \neq k} (X - z_i)^{\alpha_i} = \sum_{k=1}^p \lambda \alpha_k (X - z_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{i \neq k} (X - z_i)^{\alpha_i} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \frac{P}{X - z_k}$$

et on retrouve $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{X - z_k}$.

□

⇒ **Commentaire.** La première formule ne fournit la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ que dans le cas où P est à racines simples. Par exemple, si $P = (X-1)(X-2)(X-3)$, alors $\frac{P'}{P} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2} + \frac{1}{X-3}$. Mais si par exemple, $P = (X-1)^2(X-2) = (X-1)(X-1)(X-2)$, la première formule s'écrit $\frac{P'}{P} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$. Pour obtenir, la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, il faut encore regrouper et réduire les fractions identiques ($\frac{P'}{P} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{X-2}$) ce qui est fourni par la deuxième formule.

Exercice 5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

Solution 5. Soit P un polynôme divisible par sa dérivée. P est nécessairement de degré $n \geq 1$. Dans ce cas, $P' \neq 0$ et $\deg(P') = n - 1$. Par suite, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $P = (\alpha X + \beta)P'$ ou encore $\frac{P'}{P} = \frac{1}{\alpha X + \beta}$. Par identification avec la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{P'}{P}$, on voit que P n'a qu'une racine dans \mathbb{C} , d'ordre n . Donc, P est de la forme $\lambda(X - a)^n$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

Soit P un tel polynôme. Alors, $P' = n\lambda(X - a)^{n-1}$ puis $P = \frac{1}{n}(X - a)P'$ et donc P' divise P .

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^n$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 - \omega_k}$ où $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Solution 6. Soit $P = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$. On sait que

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}.$$

En évaluant en 2, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 - \omega_k} = \frac{n2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

2.4 Décomposition sur \mathbb{R}

2.4.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle non nulle sur \mathbb{R}

On va commencer par énoncer la version générale de la décomposition sur un corps commutatif quelconque \mathbb{K} . Cette énoncé général est hors programme de maths sup et maths spé. Mais il permet de comprendre quel est le but à atteindre quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif. Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle non nulle mise sous forme irréductible. On admet que Q s'écrit de manière unique sous la forme $Q = Q_1^{\alpha_1} \dots Q_k^{\alpha_k}$ où les Q_i sont des polynômes unitaires irréductibles sur \mathbb{K} et deux à deux distincts (et donc deux à deux premiers entre eux). Alors, (on admet que) F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j} \right)$$

où E est un polynôme et les $P_{i,j}$ sont des polynômes vérifiant : pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$, $\deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i)$ (et non pas $\deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i^{\alpha_i})$). La somme $\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j}$ s'appelle la **partie polaire relative au facteur irréductible** Q_i .

Les fractions $\frac{P}{Q^\alpha}$ où Q est un polynôme unitaire irréductible sur \mathbb{K} , P est un polynôme non nul tel que $\deg(P) < \deg(Q)$ et α est un entier naturel non nul s'appellent les **éléments simples** de $\mathbb{K}(X)$.

On note que le théorème 4 (décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), qui lui a été démontré, est (heureusement) un cas particulier du théorème ci-dessus.

On passe maintenant au cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On ne démontrera pas tout mais on n'admettra pas tout. Puisque les polynômes irréductibles sur \mathbb{R} sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif, on va obtenir deux types d'éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

- les **éléments simples de première espèce**. Ce sont les fractions $\frac{\lambda}{(X - a)^n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$.
- les **éléments simples de deuxième espèce**. Ce sont les fractions $\frac{\lambda X + \mu}{(X^2 + aX + b)^n}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 - 4b < 0$.

On se donne donc une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible. On suppose que F est un élément de $\mathbb{R}[X]$. D'après le théorème 7, P et Q sont à coefficients réels. On sait que Q s'écrit de manière unique sous la forme

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^q (X - z_i)^{\beta_i} (X - \bar{z}_i)^{\beta_i}$$

où p et q sont des entiers naturels (avec la convention usuelle qu'un produit vide est égal à 1), les α_i sont des réels deux à deux distincts, les z_i sont des nombres complexes deux à deux distincts de partie imaginaire strictement positive, les α_i et les β_i sont des entiers naturels non nuls.

Le théorème de décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} permet déjà d'écrire F sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mu_{i,j}}{(X - z_i)^j} + \frac{\nu_{i,j}}{(X - \bar{z}_i)^j} \right)$$

où E est un élément de $\mathbb{C}[X]$ et les $\lambda_{i,j}$, $\mu_{i,j}$ et $\nu_{i,j}$ sont des nombres complexes. La réalité de F ou encore $\bar{F} = F$ et l'unicité de la décomposition en éléments simples fournit les égalités $\bar{E} = E$, $\bar{\lambda}_{i,j} = \lambda_{i,j}$, $\bar{\nu}_{i,j} = \mu_{i,j}$. Donc, $E \in \mathbb{R}[X]$, les $\lambda_{i,j}$ sont des réels et F s'écrit

$$F = E + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mu_{i,j}}{(X - z_i)^j} + \frac{\bar{\mu}_{i,j}}{(X - \bar{z}_i)^j} \right).$$

De plus, cette décomposition est unique.

Effectuons maintenant un travail sur la somme $\sum_{j=1}^{\beta} \frac{\mu_j}{(X - z)^j} + \frac{\bar{\mu}_j}{(X - \bar{z})^j}$. La partie entière de cette fraction rationnelle est nulle. Après réduction au même dénominateur, elle s'écrit successivement

$$\sum_{j=1}^{\beta} \left(\frac{\mu_j}{(X - z)^j} + \frac{\bar{\mu}_j}{(X - \bar{z})^j} \right) = \sum_{j=1}^{\beta} \frac{2\operatorname{Re}(\mu_j (X - \bar{z})^j)}{(X^2 - 2X\operatorname{Re}(z) + |z|^2)^j} = \frac{P}{(X^2 + bX + c)^\beta}$$

où b et c sont deux réels tels que $b^2 - 4c < 0$ et P est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) < \deg((X^2 + bX + c)^\beta) = 2\beta$.

Montrons alors par récurrence sur β que $\frac{P}{(X^2 + bX + c)^\beta}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^{\beta} \frac{\mu_j X + \nu_j}{(X^2 + bX + c)^j}$ où les μ_i et les ν_i sont des réels.

• Le résultat est clair quand $\beta = 1$.

• Soit $\beta \geq 1$. Supposons le résultat pour β . Soit $F = \frac{P}{(X^2 + bX + c)^{\beta+1}}$ où b et c sont des réels tels que

$b^2 - 4c < 0$ et P est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) < 2(\beta + 1)$.

La division euclidienne de P par $X^2 + bX + c$ s'écrit $P = (X^2 + bX + c)P_1 + \mu X + \nu$ où $P_1 \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P_1) < 2\beta$ et $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. On obtient

$$\frac{P}{(X^2 + bX + c)^{\beta+1}} = \frac{(X^2 + bX + c)P_1 + \mu X + \nu}{(X^2 + bX + c)^{\beta+1}} = \frac{P_1}{(X^2 + bX + c)^\beta} + \frac{\mu X + \nu}{(X^2 + bX + c)^{\beta+1}}$$

et on conclut par hypothèse de récurrence.

On peut énoncer (en admettant l'unicité de la décomposition) :

Théorème 9. Soit $F = \frac{P}{Q}$ un élément non nul de $\mathbb{R}(X)$, sous forme irréductible. La décomposition de $Q \in \mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles s'écrit sous la forme

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^q (X^2 + b_i X + c_i)^{\beta_i}$$

où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, les α_i sont des réels deux à deux distincts, les (b_i, c_i) sont des couples de réels deux à deux distincts tels que $b_i^2 - 4c_i < 0$, les α_i et les β_i sont des entiers naturels non nuls.

F s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mu_{i,j} X + \nu_{i,j}}{(X^2 + b_i X + c_i)^j} \right)$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ et les $\lambda_{i,j}, \mu_{i,j}, \nu_{i,j}$ sont des réels.

2.4.2 Exemples de décompositions sur \mathbb{R}

On a déjà expliqué différentes manières d'obtenir la partie entière et les parties polaires relatives aux facteurs $(X - \alpha)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, du dénominateur.

Il reste à énoncer quelques méthodes pour obtenir les parties polaires relatives aux facteurs $(X^2 + bX + c)^\beta$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b^2 - 4c < 0$, $\beta \in \mathbb{N}^*$, du dénominateur.

La première idée (qui n'est pas forcément la meilleure) vient de la démonstration précédant le théorème 8 : on décompose en éléments simples sur \mathbb{C} , on regroupe les fractions conjuguées que l'on réduit au même dénominateur puis on effectue éventuellement des divisions euclidiennes successives.

Exemple 1. Décomposons en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction $F = \frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)}$. Sa décomposition sur \mathbb{C} s'écrit

$$F = \frac{a}{X - i} + \frac{\bar{a}}{X + i} + \frac{b}{X - j} + \frac{\bar{b}}{X - j^2}.$$

- $a = \lim_{x \rightarrow i} (x - i)F(x) = \frac{1}{(i + i)(i^2 + i + 1)} = -\frac{1}{2}$.
- $b = \lim_{x \rightarrow j} (x - j)F(x) = \frac{1}{(j^2 + 1)(j - j^2)} = \frac{1}{(-j)(j - j^2)} = \frac{1}{1 - j^2} = \frac{1 - j}{3}$.

Donc,

$$F = -\frac{1}{2(X - i)} - \frac{1}{2(X + i)} + \frac{1 - j}{3(X - j)} + \frac{1 - j^2}{3(X - j^2)}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient (toujours en tenant compte de $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$) :

$$\begin{aligned} F &= -\frac{X + i + X - i}{2(X - i)(X + i)} + \frac{(1 - j)(X - j^2) + (1 - j^2)(X - j)}{3(X - j)(X - j^2)} = -\frac{X}{X^2 + 1} + \frac{3X + 3}{3(X^2 + X + 1)} \\ &= -\frac{X}{X^2 + 1} + \frac{X + 1}{X^2 + X + 1}. \end{aligned}$$

□

Exemple 2. Décomposons en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction $F = \frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)^2}$. Sa décomposition sur \mathbb{C} s'écrit

$$F = \frac{a}{X - i} + \frac{\bar{a}}{X + i} + \frac{b}{X - j} + \frac{c}{(X - j)^2} + \frac{\bar{b}}{X - j^2} + \frac{\bar{c}}{(X - j^2)^2}.$$

- $a = \lim_{x \rightarrow i} (x - i)F(x) = \frac{1}{(i + i)(i^2 + i + 1)^2} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$.
- $c = \lim_{x \rightarrow j} (x - j)^2 F(x) = \frac{1}{(j^2 + 1)(j - j^2)^2} = \frac{1}{(-j)(j^2 - 2 + j)} = \frac{1}{3j} = \frac{j^2}{3}$.

• Pour b , il n'y a pas de technique simple. On peut par exemple retrancher $\frac{c}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}}{(X-j^2)^2}$ à F . j est alors pôle simple de la nouvelle fraction :

$$\begin{aligned} F - \frac{c}{(X-j)^2} - \frac{\bar{c}}{(X-j^2)^2} &= \frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)^2} + \frac{X^2-2X-2}{3(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{3+(X^2+1)(X^2-2X-2)}{3(X^2+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{X^4-2X^3-X^2-2X+1}{3(X^2+1)(X^2+X+1)^2} \\ &= \frac{(X^2+X+1)(X^2-3X+1)}{3(X^2+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{X^2-3X+1}{3(X^2+1)(X^2+X+1)} = G \end{aligned}$$

Puisque d'autre part, $G = \frac{a}{X-i} + \frac{\bar{a}}{X+i} + \frac{b}{X-j} + \frac{\bar{b}}{X-j^2}$, on a

$$b = \lim_{x \rightarrow j} (x-j)G(x) = \frac{j^2-3j+1}{3(j^2+1)(j-j^2)} = \frac{-4j}{3(-j)(j-j^2)} = \frac{4(j^2-j)}{9}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} F &= \frac{i}{2(X-i)} - \frac{i}{2(X+i)} + \frac{4(j^2-j)}{9(X-j)} + \frac{j^2}{3(X-j)^2} + \frac{4(j-j^2)}{9(X-j^2)} + \frac{j}{3(X-j^2)^2} \\ &= -\frac{1}{X^2+1} + \frac{4[(j^2-j)(X-j^2) + (j-j^2)(X-j)]}{9(X^2+X+1)} + \frac{j^2(X-j^2)^2 + j(X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2} \\ &= -\frac{1}{X^2+1} + \frac{4}{3(X^2+X+1)} + \frac{-X^2+2X+2}{3(X^2+X+1)^2}. \end{aligned}$$

Ce n'est pas encore tout à fait fini ! Il faut effectuer un dernier travail sur $\frac{-X^2+2X+2}{3(X^2+X+1)^2}$:

$$\frac{-X^2+2X+2}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{-X^2-X-1+3X+3}{3(X^2+X+1)^2} = -\frac{1}{3(X^2+X+1)} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$$

et finalement

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{X^2+1} + \frac{4}{3(X^2+X+1)} - \frac{1}{3(X^2+X+1)} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} \\ &= -\frac{1}{X^2+1} + \frac{1}{X^2+X+1} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}. \end{aligned}$$

□

La deuxième idée (souvent la meilleure) consiste à décomposer directement sur \mathbb{R} en utilisant une racine non réelle du trinôme. On aura besoin du résultat utile suivant :

Théorème 10. Soit z un nombre complexe **non réel**. Pour tous réels a, b, c et d ,

$$az + b = cz + d \Rightarrow a = c \text{ et } b = d.$$

DÉMONSTRATION. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $az + b = cz + d$.

Si $a \neq c$ alors $z = \frac{d-b}{a-c}$ est un réel. Par contraposition, si $z \notin \mathbb{R}$, alors $a = c$ puis $b = d$.

□

Exemple 3. On reprend la fraction $F = \frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$ de l'exemple 1. Sa décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} s'écrit

$$F = \frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} \quad (*)$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

• $ai + b = \lim_{x \rightarrow i} (x^2 + 1) F(x) = \frac{1}{i^2 + i + 1} = \frac{1}{i} = -i$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $a = -1$ et $b = 0$. (On a multiplié les deux membres de l'égalité (*) par $X^2 + 1$, on a simplifié puis on a évalué en i).

• $cj + d = \lim_{x \rightarrow j} (x^2 + x + 1) F(x) = \frac{1}{j^2 + 1} = -\frac{1}{j} = -j^2 = j + 1$. Le nombre j n'étant pas réel, le théorème 10 permet d'identifier les coefficients : $c = d = 1$. On obtient de nouveau

$$\frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)} = -\frac{1}{X^2 + 1} + \frac{X + 1}{X^2 + X + 1}.$$

Exemple 4. On terminera ces exemples par la fraction $F = \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}$ à décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} . Ici, la décomposition en éléments simples est obtenue par des divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} F &= \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\ &= \frac{X^7 + X^6 + X^5 - X^6 - X^5 - X^4 + X^4 + X^3 + X^2 - X^3 - X^2 - X + X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\ &= \frac{(X^5 - X^4 + X^2 - X)(X^2 + X + 1) + X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} = \frac{X^5 - X^4 + X^2 - X}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{X^5 - X^4 + X^2 - X}{(X^2 + X + 1)^2} &= \frac{X^5 + X^4 + X^3 - 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X^3 + X^2 + X + 2X^2 + 2X + 2 - 4X - 2}{(X^2 + X + 1)^2} \\ &= \frac{(X^3 - 2X^2 + X + 2)(X^2 + X + 1) - 4X - 2}{(X^2 + X + 1)^2} = \frac{X^3 - 2X^2 + X + 2}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{X^3 - 2X^2 + X + 2}{X^2 + X + 1} &= \frac{X^3 + X^2 + X - 3X^2 - 3X - 3 + 3X + 5}{X^2 + X + 1} = \frac{(X - 3)(X^2 + X + 1) + 3X + 5}{X^2 + X + 1} \\ &= X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} \end{aligned}$$

et finalement

$$F = X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

□

Signalons enfin que décomposer en éléments simples une fraction rationnelle est le principal outil permettant de déterminer des primitives de cette fraction rationnelle :

Exercice 7. Déterminer les primitives sur $] -1, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x^3 + 1}$.

Solution 7. f est continue sur $] -1, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$. f admet donc des primitives sur $] -1, +\infty[$.

Posons $R = \frac{1}{X^3 + 1}$ (en gardant la notation F pour une primitive de f). La décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit

$$R = \frac{3}{(X + 1)(X^2 - X + 1)} = \frac{a}{X + 1} + \frac{bX + c}{X^2 - X + 1},$$

où a , b et c sont trois réels.

$$\bullet a = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)F(x) = \frac{3}{(-1)^2 - (-1) + 1} = 1.$$

$$\bullet \text{ Puisque } X^2 - X + 1 = (X+j)(X+j^2), b(-j) + c = \lim_{x \rightarrow -j} (x^2 - x + 1)F(x) = \frac{3}{-j+1} = \frac{3(-j^2+1)}{(-j+1)(-j^2+1)} = j+2 = -(-j) + 2. \text{ Puisque } -j \text{ n'est pas réel, on obtient } b = -1 \text{ et } c = 2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-4}{X^2-X+1} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{X^2-X+1} \\ &= \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Une primitive sur $] -1, +\infty[$ de la fonction f est donc la fonction

$$F : x \mapsto \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

ou encore

$$F : x \mapsto \ln \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \right) + \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$$
