Planche n° 22. Fonctions de plusieurs variables. Corrigé

Exercice n° 1

1) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\dfrac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$ et donc $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

Mais alors, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}|xy|$. Comme $\dfrac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

3) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \dfrac{1}{\sqrt{2|x|}}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \dfrac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

6) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.
$\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \dfrac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \dfrac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

7) f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé de la surface d'équation $x^2-y^2+z^2=0$.
$f(x,0,0) = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

8) $f(2+h,-2+k,l) = \dfrac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\dfrac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0 \neq \dfrac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Exercice n° 2

- f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
- f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \frac{|xy|\left|x^2-y^2\right|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ (au moins) sur } \mathbb{R}^2.$$

- **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{\left(3x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3-xy^2\right)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

D'autre part, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = -f(y, x)$. Donc pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{et}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| = \frac{|y||x^4 + 4x^2y^2 - y^4|}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f \text{ est au moins de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice n° 3

On pose $D = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

• f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x, y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de f en $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $(x, y) \neq (x_0, 0)$,

$$|f(x, y) - f(x_0, 0)| = \begin{cases} y^2 \left|\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} = y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x, y) tend vers 0, $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (x_0,0) \\ (x,y) \neq (x_0,0)}} f(x, y) = 0 = f(x_0, 0)$ et donc f est continue en $(x_0, 0)$ puis

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$, x_0 réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0.$$

Donc $\dfrac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$. Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left\{\begin{array}{l}y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right..$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}=\frac{y^2\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)}{y}=y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right|\leqslant|y|$ puis que $\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0$. Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left\{\begin{array}{l}2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)-x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right..$$

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right|=\left\{\begin{array}{l}|y|\left|\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right.\leqslant|y|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand (x,y) tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0=0$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|=\left\{\begin{array}{l}\left|2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)-x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right|\ \text{si}\ y\neq 0\\ 0\ \text{si}\ y=0\end{array}\right.\leqslant 2|y|+|x|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|x|+2|y|$ tend vers 0 et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Supposons maintenant $x_0\neq 0$. Pour $y\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)=2y\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)-x_0\cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)\right|\leqslant 2|y|$ et $x_0\cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0\neq 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0\neq 0$. On a montré que

f est de classe C^1 sur $\Omega\cup\{(0,0)\}$ et pas plus.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$. Pour $x\neq 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{0-0}{x}=0.$$

Donc $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{y\cos\left(\dfrac{0}{y}\right)}{y}=1.$$

Donc $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. On a montré que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Exercice n° 4

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda>0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)=r\lambda^{r-1}f(x),$$

et pour $\lambda=1$, on obtient

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

Exercice n° 5

1) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f.

$$df_{(x,y)}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2xy=0\\ x^2+\dfrac{2y}{1+y^2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right..$$

Si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, alors $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Réciproquement, pour tout réel $x\neq 0$, $f\left(x,x^2\right)-f(0,0)=f(x,y)=x^4+\ln\left(1+x^4\right)>0$. Puisque $\left(x,x^2\right)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow}(0,0)$, l'expression $f(x,y)-f(0,0)$ prend des valeurs strictement positives dans tout voisinage de $(0,0)$.
D'autre part, pour tout réel $x\neq 0$, $f\left(x,-x^2\right)-f(0,0)=f(x,y)=-x^4+\ln\left(1+x^4\right)<0$ (inégalité de convexité). L'expression $f(x,y)-f(0,0)$ prend aussi des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de $(0,0)$.

Ainsi, $f(0,0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local et finalement, f n'a pas d'extremum local.

2) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4(x-y)+4x^3=0\\ 4(x-y)+4y^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^3+y^3=0\\ -4(x-y)+4x^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-x\\ x^3-2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}.$$

f admet donc trois points critiques : $(0,0)$, $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

• Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $r(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4$, $t(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4$ et $s(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4$. Donc la matrice hessienne de f en (x,y) est :

$$H_f(x,y)\begin{pmatrix}r(x,y)&s(x,y)\\ s(x,y)&t(x,y)\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}3x^2-1&1\\ 1&3y^2-1\end{pmatrix},$$

puis

$$\det\left(H_f(x,y)\right) = \left(rt - s^2\right)(x,y) = \left(12x^2-4\right)\left(12y^2-4\right) - 4^2 = 16\left(\left(3x^2-1\right)\left(3y^2-1\right)-1\right).$$

• Etude en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$. Det $\left(H_f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right) = \left(rt-s^2\right)\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = 16\times 24 > 0$ et Tr $\left(H_f(x,y)\right) = (r+t)\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = 4(5+5) > 0$. Donc $H_f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ puis f admet un minimum local en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

Autre solution. $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = -8$ puis, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) &= x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy+8 \geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2-2\left(x^2+y^2\right)+8 \\ &= x^4-4x^2+y^4-4y^2+8 = \left(x^2-2\right)^2+\left(y^2-2\right)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

et donc f admet un minimum global en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à -8.

• Etude en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ et en particulier, $f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = -8$. Donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ égal à -8.

• Etude en $(0,0)$. $f(0,0) = 0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x,0) = x^4-2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2+3y^2-15 = 0 \\ 6xy-12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2+\dfrac{4}{x^2}-5 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right) = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow (x,y)\in\{(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}. \end{aligned}$$

f admet exactement quatre points critiques : $(1,2)$, $(2,1)$, $(-1,-2)$ et $(-2,-1)$. On note que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = -f(x,y)$.
Ensuite, $r = 6x+6y$, $t = 6x$ et $s = 6y$ puis $rt-s^2 = 36\left(x^2+xy-y^2\right)$ et $r+t = 12x+6y$.

• $\left(rt-s^2\right)(1,2) = -36 < 0$. f n'a pas d'extremum local en $(1,2)$ et donc pas d'extremum local en $(-1,-2)$ également.

• $\left(rt-s^2\right)(2,1) = 5\times 36 > 0$ et de plus $(r+t)(2,1) > 0$. f a un minimum local en $(2,1)$ puis, par symétrie, un maximum local en $(-2,-1)$.

4) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, (x_0,y_0,z_0) est un point critique de f. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+yz = 0 \\ xz+1 = 0 \\ xy-1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x}\ (\mathrm{I}) \\ z = -\dfrac{1}{x} \\ x-\dfrac{1}{x^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ y = \dfrac{1}{x}\ (\mathrm{I}) \\ z = -\dfrac{1}{x} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1\ (\mathrm{I}) \\ z = -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

f admet un point critique et un seul, le point $(1,1,-1)$. En un point (x,y,z), la matrice hessienne de f est

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

et en particulier, $H_f(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite,

$$\chi_{H_f(1,1,-1)} = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)\left(X^2-1\right) - (X-1) - (X-1) = (X-1)\left(X^2-3\right) = (X-1)\left(X-\sqrt{3}\right)\left(X+\sqrt{3}\right).$$

Le spectre de $H_f(1,1,-1)$ n'est ni contenu dans $\mathbb{R}^+$, ni contenu dans $\mathbb{R}^-$ et donc $H_f(1,1,-1)$ n'est ni positive, ni négative. On sait alors que f ne peut avoir d'extremum local en $(1,1,-1)$. Finalement, f n'a pas d'extremum local.

Exercice n° 6

$\mathscr{S}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ et f est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que polynôme. Donc, la fonction f admet sur $\mathscr{S}$ un minimum et un maximum.

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ de sorte $\mathscr{S} = g^{-1}(\{0\})$. g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $dg_{(x,y,z)} = 2xdx+2ydy+2zdz$. Si (x,y,z) est un point de $\mathscr{S}$, $dg_{(x,y,z)} \neq 0$ et donc, d'après le théorème des extrémas liés, en un point de $\mathscr{S}$ où $f_{/\mathscr{S}}$ atteint un extremum, $df_{(x,y,z)}$ est colinéaire à $dg_{(x,y,z)}$. Or, pour $(x,y,z) \in \mathscr{S}$,

$$\left(df_{(x,y,z)}, dg_{(x,y,z)}\right) \text{ liée} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} 2x-2y-2z = 2\lambda x \\ -2x+2y = 2\lambda y \\ -2x+2z = 2\lambda z \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{\begin{array}{l} (\lambda-1)x+y+z = 0 \\ x+(\lambda-1)y = 0 \\ x+(\lambda-1)z = 0 \end{array}\right. \quad (S).$$

Le déterminant de ce sytème est

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= (\lambda-1)^3 - (\lambda-1) + (-\lambda+1) \\ &= (\lambda-1)^3 - 2(\lambda-1) = (\lambda-1)\left((\lambda-1)^2-2\right) = (\lambda-1)\left(\lambda-1-\sqrt{2}\right)\left(\lambda-1+\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Si $\lambda \notin \left[1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$, $\det(S) \neq 0$ et donc (S) admet l'unique solution $(x,y,z) = (0,0,0)$ qui n'est pas un point de $\mathscr{S}$. Donc, $\lambda \in \left[1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$.

• Si $\lambda = 1$, en tenant compte de $(x,y,z) \in \mathscr{S}$,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -y \\ 2y^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z) = \pm\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

De plus, $f\left(\pm\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.

• Si $\lambda = 1+\sqrt{2}$, en tenant compte de $(x,y,z) \in \mathscr{S}$,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}x+y+z = 0 \\ x+\sqrt{2}y = 0 \\ x+\sqrt{2}z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = z = -\dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ x^2+2\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

De plus, $f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1+\sqrt{2}$.

• Si $\lambda = 1-\sqrt{2}$, un calcul conjugué fournit $(x,y,z) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ puis $f(x,y,z) = 1-\sqrt{2}$.

Puisque $1-\sqrt{2} < 1 < 1+\sqrt{2}$, le minimum de f sur $\mathscr{S}$ est $1-\sqrt{2}$ et le maximum de f sur $\mathscr{S}$ est $1+\sqrt{2}$

Exercice n° 7

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A+H)^{-1}(-HA^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}.\end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\|^2$.

Maintenant, la formule $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}(\text{com}(M))^T$, valable pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0} \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|} \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| = 0.$$

Comme l'application $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A.

$$\boxed{\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.}$$

Exercice n° 8

Pour tout complexe z tel que $|z| \leqslant 1$,

$$|\sin(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|) \leqslant \text{sh}\, 1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z = i$ car $|\sin(i)| = \left|\dfrac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i}\right| = \dfrac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1)$.

$$\boxed{\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\} = \text{sh}(1).}$$

Exercice n° 9

1) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x + y$ et $v = x + 2y$. L'application $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y) = (u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u,v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + 2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x+2y) \text{ où } h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto \cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

2) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta) = h_1(r) \\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h(x^2+y^2). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Soit $\begin{array}{rccc}\varphi : &]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & (u,uv) = (x,y)\end{array}$. Donc si on pose $f(x,y) = g(u,v)$, on a $g = f \circ \varphi$.

Soit $(x,y,u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = x \\ uv = y \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = \dfrac{y}{x} \end{array}\right. .$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + \left(\dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \dfrac{2y}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(v) \\ &\Leftrightarrow \exists (h,k) \in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v) = uh(v) + k(v) \\ &\Leftrightarrow \exists (h,k) \in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y) = xh(xy) + k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y) \mapsto xh(xy) + k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 10

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\| = \mathrm{Max}\{\|x\|_2, \|y\|_2\}$.

- Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,k)) = \langle a+h, b+k\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,h\rangle + \langle b,k\rangle + \langle h,k\rangle,$$

et donc $f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) = \langle a,h\rangle + \langle b,k\rangle + \langle h,k\rangle$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k) \mapsto \langle a,h\rangle + \langle b,k\rangle$ est linéaire et de plus, pour $(h,k) \neq (0,0)$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f((a,b)+(h,k)) - f((a,b)) - L((h,k))| = |\langle h,k\rangle| \leqslant \|(h,k)\|^2,$$

et donc $\dfrac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| \leqslant \|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = 0.$$

Puisque l'application $(h,k) \mapsto \langle a,h\rangle + \langle b,k\rangle$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a,b) et que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k) = \langle a,h\rangle + \langle b,k\rangle$.

Exercice n° 11

1ère solution. Pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i = \frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^n x_i h_i = \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2}.}$$

2 ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} = \frac{2\langle x,h\rangle + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2} = \frac{2\langle x,h\rangle + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} - \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2} = \frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)\langle x,h\rangle + \|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\dfrac{1}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2 - \|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|\langle x,h\rangle| \leqslant \|x\|_2\|h\|_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz), on a $x|h \underset{h\to 0}{=} O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(\langle x,h\rangle) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\dfrac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)\langle x,h\rangle + \|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h\to 0}{=} \|x\|_2 + \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \dfrac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df_x(h) = \dfrac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2}$.

• Vérifions que f n'est pas différentiable en 0. Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1 - L\left(\dfrac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \dfrac{t}{|t|}L\left(\dfrac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u) = \|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u) = -\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Exercice n° 12

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u =$ aire de MBC, $v =$ aire de MCA et $w =$ aire de MAB. On a

$$d(M,(BC)) \times d(M,(CA)) \times d(M,(AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathscr{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v) \mapsto uv(\mathscr{A} - u - v)$ sur le domaine

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \text{ et } u + v \leqslant \mathscr{A}\right\}.$$

T est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $\forall (u,v) \in T^2$, $\|(u,v)\|_1 = u + v \leqslant \mathscr{A}$ et donc T est bornée.
- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v) \mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v) \mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v) \mapsto u + v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0\} = \varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ v \geqslant 0\} = \varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u + v \leqslant \mathscr{A}\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty,\mathscr{A}])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.

Puisque T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, T est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

f est continue sur le compact T à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T.

Pour tout (u,v) appartenant à la frontière de T, on a $f(u,v) = 0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u > 0,\ v > 0 \text{ et } u + v < 0\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{T}$, (u_0,v_0) est nécessairement un point critique de f. Soit $(u,v) \in \overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v(\mathscr{A} - 2u - v) = 0 \\ u(\mathscr{A} - u - 2v) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u + v = \mathscr{A} \\ u + 2v = \mathscr{A} \end{array}\right. \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0) = \left(\dfrac{\mathscr{A}}{3},\dfrac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0) = \dfrac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\dfrac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a

$$M = \text{bar}\left((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } MAC), (C, \text{aire de } MAB)\right).$$

Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Exercice n° 13

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = MA + MB \geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x,y) de la forme $(\lambda a,(1-\lambda)a)$, $\lambda \in [0,1]$.

Exercice n° 14

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\sin(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -4\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\sin^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + 4\frac{1-\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^2(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -2\cos(2x)\frac{2\,\mathrm{ch}^3(2y) - 4\,\mathrm{sh}^2(2y)\,\mathrm{ch}(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}(-\mathrm{ch}^2(2y)+2)f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)(\mathrm{ch}^2(2y)-1)}{\mathrm{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y) = -2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $-1\leqslant\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}\,(2\times 0)} = \cos(2x)$ décrit $[-1,1]$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} = [-1,1]$. Par suite,

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $]-1,1[$. Or $\left|\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \mathrm{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \mathrm{ch}(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ et $x\in\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t) = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t) = \frac{\lambda}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \mu.\end{aligned}$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\lambda\neq 0$.

$$\boxed{\text{L'application } t\mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \text{ convient.}}$$

Exercice n° 15

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) s'écrit $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y)\\ s(x,y) & c(x,y)\end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2+s^2 = 1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Ceci s'écrit encore $\dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c\\ s\end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s\\ c\end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\ (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x ou à y, on obtient les égalités $c\dfrac{\partial c}{\partial x}+s\dfrac{\partial s}{\partial x}=0$ et $c\dfrac{\partial c}{\partial y}+s\dfrac{\partial s}{\partial y}=0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial x}\\ \dfrac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial x}\\ \dfrac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial y}\\ \dfrac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x,y) est $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0,0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f=g$ et f est une rotation affine.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation.
Montrer que f est une rotation affine.