Planche n° 22. Fonctions de plusieurs variables

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (I)**

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ **2)** $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ **3)** $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$ **4)** $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$

5) $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$ **6)** $\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$ **7)** $\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$ **8)** $\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

Exercice n° 2 (* I)**

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 3 (* I)**

Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0\\ 0 \text{ si } y=0\end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1. Vérifier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Exercice n° 4 (*)

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda\in]0,+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :

$$\forall x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

Exercice n° 5 (I)** Extrema locaux, globaux des fonctions suivantes :

1) $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2y+\ln\left(1+y^2\right)$.
2) $f\ :\ (x,y)\mapsto -2(x-y)^2+x^4+y^4$.
3) $f\ :\ (x,y)\mapsto x^3+3xy^2-15x-12y$.
4) $f\ :\ (x,y,z)\mapsto \dfrac{x^2}{2}+xyz+y-z$.

Exercice n° 6 (I)**

Extrema de la fonction $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-2xy-2xz$ sur $\mathscr{S}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2=1\right\}$.

Exercice n° 7 (* I)**

Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R})\\ A & \mapsto & A^{-1}\end{array}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.

Exercice n° 8 (*)

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}$.

Exercice n° 9 (* I)**

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ en posant $u=x+y$ et $v=x+2y$.

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en passant en polaires.

3) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x=u$ et $y=uv$.

Exercice n° 10 (**)

Déterminer la différentielle en tout point de $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle\end{array}$.

Exercice n° 11 (**)

$E=\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f:\begin{array}{ccc}E & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \|x\|_2\end{array}$ est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et préciser df. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Exercice n° 12 (***)

Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Exercice n° 13 (*)

Minimum de $f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a réel donné.

Exercice n° 14 (***)

Trouver une application non constante $f\;:\;]-1,1[\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

Exercice n° 15 (* I)**

Soit $f\;:\;\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.