

Planche n° 22. Dérivation

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (***)

Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup\{f'(x), x \in [a, b]\}$. Montrer que f est affine.

Exercice n° 2 (***) (Formule de TAYLOR-LAGRANGE)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction élément de $C^n([a, b], \mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a, b[, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à la fonction $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Exercice n° 3 (***) (Formule des trapèzes)

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a, b[, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}.$$

Indication. Appliquer le théorème de ROLLE à g puis g' où $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$? Interprétez géométriquement.

Exercice n° 4 (***)T

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée n -ème de la fonction proposée :

$$1) x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x) \quad 2) x \mapsto \cos^3 x \sin(2x) \quad 3) x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3} \quad 4) x \mapsto (x^3+2x-7)e^x.$$

Exercice n° 5 (***)I

Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice n° 6 (***)T

Montrer que pour tout réel strictement positif x , on a : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Exercice n° 7 (***)I

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a strictement positif. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Exercice n° 8 (***)

(Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans \mathbb{R} . Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.

1) Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$.

2) Montrer qu'il existe y dans $[a, b]$ tel que $m = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$ puis qu'il existe x tel que $f'(x) = m$.

Exercice n° 9 (*IT)

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \cos \sqrt{x}$.

Exercice n° 10 ()** (Généralisation du théorème des accroissements finis)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

$$\text{Soit } \Delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{vmatrix} f(a) - f(x) & f(b) - f(x) \\ g(a) - g(x) & g(b) - g(x) \end{vmatrix}.$$

1) Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer sa dérivée.

2) En déduire qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$.

Exercice n° 11 ()**

Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n° 12 (*)**

Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R} vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante puis déterminer f .

Exercice n° 13 (*)**

Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R} vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = e^x f(x)$).

Exercice n° 14 (*)**

Etudier la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

- | | |
|---|---|
| 1) $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ | 2) $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ |
| 3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$ | 4) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$ |
| 5) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(2u_n)$ | 6) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. |