Planche n° 21. Equations différentielles linéaires. Corrigé

Exercice n° 1

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation différentielle considérée et (E_H) l'équation homogène associée.

1) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ forment un $\mathbb{R}$-espace affine de direction l'espace des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1. La fonction $x \mapsto 1$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est une solution non nulle de (E_H) sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto 1 + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

2) Les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x/2}$. Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

1ère solution. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a\cos x + b\sin x$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (car i et $-i$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique). Soit f une telle fonction. Alors, pour tout réel x,

$$2f'(x) - f(x) = 2(-a\sin x + b\cos x) - (a\cos x + b\sin x) = (-a + 2b)\cos x + (-2a - b)\sin x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(x) - f(x) = \cos x \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} -a + 2b = 1 \\ -2a - b = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftarrow a = -\frac{1}{5} \text{ et } b = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x) + \lambda e^{x/2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2ème solution. Par la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x/2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit f une telle fonction.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur} \mathbb{R} &\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\left(\lambda'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\lambda(x)e^{x/2}\right) - 2\lambda(x)e^{x/2} = \cos(x) \\ &\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x\ dx &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int e^{(-\frac{1}{2}+i)x}\ dx\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}}{-\frac{1}{2}+i}\right) + C = \frac{1}{5}e^{-x/2}\mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)(-1 - 2i)\right) + C \\ &= \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x) + C. \end{aligned}$$

Par suite, on peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x)$ ce qui fournit la solution particulière $f_0(x) = \frac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x)$.

3) Puisque les fonctions $x \mapsto -2$ et $x \mapsto xe^{2x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{-2x}f)'(x) = x \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right) e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

4) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $z^2 - 4z + 4 = 0$ et admet $z_0 = 2$ pour racine double. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique, l'équation $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ admet une solution particulière f_0 de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = ax^2e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$. La formule de Leibniz fournit pour tout réel x,

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} - 4a(2x^2 + 2x)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 2ae^{2x},$$

et f_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right) e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

5) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est $z^2 + 4 = 0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -2i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1ère solution. Une solution réelle de l'équation $y'' + 4y = \cos(2x)$ est la partie réelle d'une solution de l'équation $y'' + 4y = e^{2ix}$. Puisque le nombre $2i$ est racine simple de (E_c), cette dernière équation admet une solution de la forme $f_1\ :\ x \mapsto axe^{2ix}$, $a \in \mathbb{C}$. La formule de Leibniz fournit pour tout réel x,

$$f_1''(x) + 4f_1(x) = a((-4x + 4i)e^{2ix} + 4xe^{2ix}) = 4iae^{2ix}.$$

et f_1 est solution de $y'' + 4y = e^{2ix}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{4i}$. On obtient $f_1(x) = \dfrac{1}{4i}xe^{2ix} = \dfrac{1}{4}x(-i\cos(2x) + \sin(2x))$ ce qui fournit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \dfrac{1}{4}x\sin(2x)$.

2ème solution. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0\ :\ x \mapsto \lambda(x)\cos(2x) + \mu(x)\sin(2x)$ où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x, $\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x)\cos(2x) + \mu(x)\sin(2x) = 0 \\ -2\lambda'(x)\sin(2x) + 2\mu'(x)\cos(2x) = \cos(2x) \end{array}\right.$ et donc, pour tout réel x, $\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)\sin(2x) \\ \mu'(x) = \dfrac{1}{2}\cos^2(2x) \end{array}\right.$ ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x) = -\dfrac{\sin(4x)}{4} \\ \mu'(x) = \dfrac{1 + \cos(4x)}{4} \end{array}\right..$$

On peut prendre pour tout réel x, $\lambda(x) = \dfrac{\cos(4x)}{16}$ et $\mu(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(4x)}{16}$ et donc,

$$f_0(x) = \frac{\cos(4x)}{16}\cos(2x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{\sin(4x)}{16}\right)\sin(2x) = \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{16}\cos(2x).$$

Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{16}\cos(2x)$ est une solution de l'équation homogène (E_H), une autre solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{4}x\sin(2x)$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{4}x\sin(2x) + \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

6) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_H) est $z^2 + 2z + 2 = 0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout réel x, $\cos(x)\,\mathrm{ch}(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\,\mathrm{ch}(x)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$. Notons (E_1) l'équation $y'' + 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0 = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(f_1 + f_2)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de superposition des solutions.

- (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1\ :\ x \mapsto ae^{(1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f_1''(x) + 2f_1'(x) + 2f_1(x) = a((1+i)^2 + 2(1+i) + 2)e^{(1+i)x} = a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

et f_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{4+4i} = \dfrac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x) = \dfrac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.

• (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2 : x \mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. La formule de Leibniz fournit pour tout réel x,

$$f_2''(x) + 2f_2'(x) + 2f_2(x) = a(((-1+i)^2x + 2(-1+i)) + 2((-1+i)x+1) + 2x)e^{(-1+i)x} = 2iae^{(-1+i)x}$$

et f_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$. On obtient $f_2(x) = -\dfrac{i}{2}e^{(-1+i)x}$.

• Une solution particulière f_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc définie pour tout réel x par

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x} - \frac{i}{2}e^{(-1+i)x}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))e^x - \frac{i}{2}(\cos(x)+i\sin(x))e^{-x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(\cos(x)+\sin(x))e^x + \frac{1}{2}\sin(x)e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{16}(\cos(x)+\sin(x))e^x + \frac{1}{4}\sin(x)e^{-x} + (\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Exercice n° 2

1) Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \alpha y = g$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
f' + \alpha f = g &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\alpha x}f'(x) + \alpha e^{\alpha x}f(x) = e^{\alpha x}g(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{\alpha x}f)'(x) = e^{\alpha x}g(x)\\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\alpha x}f(x) = f(0) + \int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et que $|e^{-\alpha x}| = e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(0)e^{-\alpha x} = 0$. Vérifions alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}\displaystyle\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt = \frac{\ell}{\alpha}$ sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

On suppose tout d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 > 0$ tel que $\forall t \geqslant A_1$, $|g(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon\mathrm{Re}(\alpha)}{2}$. Pour $x \geqslant A_1$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| &\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}|g(t)|\,dt\\
&\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\mathrm{Re}(\alpha)t} \times \frac{\varepsilon\mathrm{Re}(\alpha)}{2}\,dt\\
&= e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{-\mathrm{Re}(\alpha)(x-A_1)}\right)\\
&\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Maintenant $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\displaystyle\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| = 0$ et donc il existe $A \geqslant A_1$ tel que $\forall x \geqslant A$, $e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\displaystyle\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $x \geqslant A$, on a $\left|e^{-\alpha x}\displaystyle\int_0^x e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a ainsi montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \dfrac{\ell}{\alpha}$.

On revient maintenant au cas général ℓ quelconque.

$$\begin{aligned}
f' + \alpha f \underset{x\to+\infty}{\to} \ell &\Rightarrow f' + \alpha f - \ell \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \left(f - \frac{\ell}{\alpha}\right)' + \alpha\left(f - \frac{\ell}{\alpha}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0\\
&\Rightarrow f - \frac{\ell}{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\ell}{\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \lim_{x\to+\infty}(f'(x) + \alpha f(x)) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}.}$$

2) $f'' + f' + f = (f' - jf)' - j^2(f' - jf)$. D'après 1), comme $\mathrm{Re}(-j^2) = \mathrm{Re}(-j) = \dfrac{1}{2} > 0$,

$$f'' + f' + f \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow (f' - jf)' - j^2(f' - jf) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f' - jf \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

$$\boxed{\forall f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim_{x\to+\infty}(f''(x) + f'(x) + f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

3) Montrons le résultat par récurrence sur n.

• Pour $n = 1$, c'est le 1) dans le cas particulier $\ell = 0$ (si $P = X - \alpha$, $P(D)(f) = f' - \alpha f$ avec $\mathrm{Re}(-\alpha) > 0$).
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat acquis pour n. Soit P un polynôme de degré $n+1$ dont les racines ont des parties réelles strictement négatives et tel que $\lim\limits_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0$. Soit α une racine de P. P s'écrit $P = (X - \alpha)Q$ où Q est un polynôme dont les racines ont toutes une partie réelle strictement négative. Puisque

$$P(D)(f) = ((D - \alpha\mathrm{Id}) \circ (Q(D))(f) = (Q(D)(f))' - \alpha(Q(D)(f)) \underset{+\infty}{\to} 0,$$

on en déduit que $Q(D)(f) \underset{+\infty}{\to} 0$ d'après le cas $n = 1$ puis que $f \underset{+\infty}{\to} 0$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 3

On pose $g = f + f''$. Par hypothèse, la fonction g est une application continue et positive sur $\mathbb{R}$ et de plus, la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g$ sur $\mathbb{R}$. Résolvons cette équation différentielle, notée (E), sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0\ :\ x \mapsto \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x)$ où de plus les fonctions λ et μ sont solutions du système

$$\begin{cases} \lambda'\cos(x) + \mu'\sin(x) = 0 \\ -\lambda'\sin(x) + \mu'\cos(x) = g \end{cases}.$$

Les formules de Cramer fournissent $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x) = -g(x)\sin(x)$ et $\mu'(x) = g(x)\cos(x)$. On peut alors prendre $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = -\displaystyle\int_0^x g(t)\sin(t)\ dt$ et $\mu(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\cos(t)\ dt$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = -\cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\ dt + \sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\ dt = \int_0^x g(t)\sin(x - t)\ dt.$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\sin(x-t)\ dt$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f est l'une de ces solutions. Par suite, il existe $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_0\cos(x) + \mu_0\sin(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\sin(x-t)\ dt$ et donc pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+\pi) &= \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x + \pi - t)\ dt + \int_0^x g(t)\sin(x - t)\ dt = -\int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x-t)\ dt + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\ dt \\ &= \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t - x)\ dt = \int_0^{\pi} g(u + x)\sin(u)\ du \geqslant 0. \end{aligned}$$

On a montré que si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice n° 4

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1) On note J l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Sur J, l'équation (E) s'écrit encore $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Comme la fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est continue sur J, les solutions de (E) sur J constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Enfin, la fonction $x \mapsto x^2$ est une solution non nulle de (E) sur J et donc $\mathscr{S}_J = \left\{x \mapsto \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2 \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\\ \lambda_2x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2 \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_2x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.$.

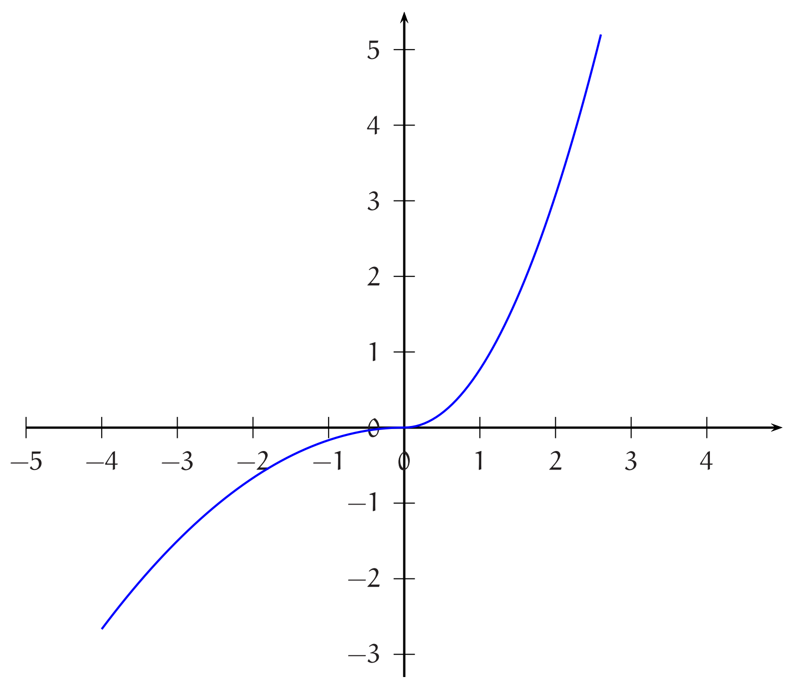
Réciproquement, une telle fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie encore l'équation (E) en 0 si de plus elle est dérivable en 0. Donc, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 pour tout choix de λ_1 et λ_2 et donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout choix de λ_1 et λ_2.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x^2 \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_2x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

On note que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. En effet, pour toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda_1\left\{\begin{array}{l}x^2 \text{ si } x\geqslant 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{array}\right.+\lambda_2\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\geqslant 0\\ x^2 \text{ si } x<0\end{array}\right.=\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)$. Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\text{Vect}(f_1,f_2)$ avec (f_1,f_2) clairement libre.

Voici un exemple de graphe de solution sur $\mathbb{R}$:



2) L'ensemble des solutions sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ est $\{x\mapsto\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x \text{ si } x\geqslant 0\\ \lambda_2x \text{ si } x<0\end{array}\right.$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.
Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\{x\mapsto\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}\}.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

3) L'ensemble des solutions sur $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ est $\{x\mapsto\dfrac{\lambda}{x},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lambda_1x \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\\ \lambda_2x \text{ si } x<0\end{array}\right.$.

Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.
Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\{0\}.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 0.

4) Soit f une fonction dérivable sur $I =]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ xf'(x) - 2f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{2}{x^3}f(x) = 1\\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(\frac{1}{x^2}f\right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda\\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = x^3 + \lambda x^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \{x \mapsto x^3 + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

5) Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2y' + 2xy = 1$ alors $0^2 \times f'(0) + 0 \times f(0) = 1$ ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

6) • **Résolution sur** $]-\infty,0[$, $]0,1[$ **et** $]1,+\infty[$**.** Soit I l'un des trois intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, l'équation (E) s'écrit encore $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}$. Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x(1-x)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I. Pour $x \in I$, on note ε le signe de x sur I.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}}{2x(1-x)}\\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon x}}{2\left(\sqrt{\varepsilon x}\right)^2(1-x)}\\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}.\end{aligned}$$

Déterminons alors les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}$ sur I. En posant $u = \sqrt{\varepsilon x}$ et donc $x = \varepsilon u^2$ puis $du = 2\varepsilon u du$.

$$\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\ dx = \int \frac{\varepsilon}{2u(1-\varepsilon u^2)}2\varepsilon u\ du = \int \frac{1}{1-\varepsilon u^2}\ du.$$

-*Résolution sur* $]-\infty,0[$.
Dans ce cas, $\varepsilon = -1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\ dx = \int \frac{1}{1+u^2}\ du = \text{Arctan}(u) + \lambda = \text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda$. Par suite,

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ \sqrt{-x}f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda\\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

-*Résolution sur* $]0,1[$ *ou* $]1,+\infty[$.
Dans ce cas, $\varepsilon = 1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\ dx = \int \frac{1}{1-u^2}\ du = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)\ du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| + \lambda$. Par suite,
-*Résolution sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,1[} = \left\{x \mapsto \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } \mathscr{S}_{]1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + \lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

-*Résolution sur* $]0,+\infty[$ *et sur* $\mathbb{R}$. Si f est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$, alors $0\times f'(1)+0\times f(1)=1$ ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\varnothing \text{ et } \mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\varnothing.}$$

-*Résolution sur* $]-\infty,1[$. Si f est une solution de (E) sur $]-\infty,1[$, alors il existe nécessairement $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in]-\infty,1[,\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda_1}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x=0\\ \dfrac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\lambda_2}{\sqrt{x}} \text{ si } 0<x<1\end{array}\right.$. Réciproquement une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\lambda_1+\sqrt{-x}-\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left((\sqrt{-x})^3\right)\right)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}}+1+\frac{x}{3}+o(x)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}}+f(0)+\frac{x}{3}+o(x).$$

et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_2+\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_2+\sqrt{x}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+o\left((\sqrt{x})^3\right)\right)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x}}+1+\frac{x}{3}+o(x)\\&=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x}}+f(0)+\frac{x}{3}+o(x).\end{aligned}$$

Par suite, f est dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$ et dans ce cas, quand x tend vers 0, $f(x)=f(0)+\dfrac{x}{3}+o(x)$ ce qui montre que f est dérivable en 0. En résumé, f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$ si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,1[}=\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x=0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } 0<x<1\end{array}\right.\right\}.}$$

7) Résolution de (E) **sur** $]-\infty,0[$ **et sur** $]0,+\infty[$**.** Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. On note ε le signe de x sur I. Sur I, (E) s'écrit encore $y'+\varepsilon\left(1-\dfrac{1}{x}\right)y=\varepsilon x^2$. Puisque les deux fonctions $x\mapsto\varepsilon\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ et $x\mapsto\varepsilon x^2$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x)=\varepsilon x^2\\&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}f'(x)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}f(x)=\varepsilon x^2e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}\\&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ \left((\varepsilon x)^{-\varepsilon}e^{\varepsilon x}f\right)'(x)=x^{-\varepsilon}x^2e^{\varepsilon x}\end{aligned}$$

- Si $I=]0,+\infty[$, $\varepsilon=1$ et

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x)=xe^x\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x}f(x)=(x-1)e^x+\lambda\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2-x+\lambda xe^{-x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

• Si $I =]-\infty, 0[$, $\varepsilon = -1$ et

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(-xe^{-x}f\right)'(x) = x^3e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(xe^{-x}f\right)'(x) = -x^3e^{-x}.$$

Or, $\displaystyle\int -x^3e^{-x}\,dx = x^3e^{-x} - 3\int x^2e^{-x}\,dx = (x^3+3x^2)e^{-x} - 6\int xe^{-x}\,dx = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x} + \lambda$ et donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2+3x+6+\frac{6+\lambda e^x}{x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto x^2+3x+6+\frac{6+\lambda e^x}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$. Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda_1 xe^{-x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2+3x+6+\dfrac{6+\lambda_2e^x}{x} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x + \lambda_1 xe^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+6+\dfrac{6+\lambda_2e^x}{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$. Réciproquement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = -x + o(x) + \lambda_1 x(1+o(1)) = (\lambda_1 - 1)x + o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de λ_1 et $f'_d(0) = \lambda_1 - 1$.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = 6+3x+o(x) + \frac{6+\lambda_2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x} = \frac{6+\lambda_2}{x} + 6 + \lambda_2 + \left(3+\frac{\lambda_2}{2}\right)x + o(x)$$

Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_2 = -6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = o(x)$ et $f'_g(0) = 0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. Ceci équivaut à $\lambda_2 = -6$ et $\lambda_1 = 1$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + xe^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+6+\dfrac{6(1-e^x)}{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}\right\}.}$$

Exercice n° 5

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Par suite, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 4$ et d'après la règle de d'Alembert, $R_a = \dfrac{1}{4}$. Pour x tel que la série converge, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$.

• Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)a_{n+1} + 4na_n = 2a_n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on multiplie les deux membres de cette égalité par x^n puis on somme sur n. On obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ ou encore $(1+4x)f'(x) = 2f(x)$. De plus $f(0) = a_0 = 1$. Mais alors

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ (1+4x)f'(x) = 2f(x) \Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f'(x) - \frac{2}{1+4x}e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \left(\frac{f}{\sqrt{1+4x}}\right)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}} = \frac{f(0)}{\sqrt{1+0}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ f(x) = \sqrt{1+4x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n = \sqrt{1+4x}.}$$

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)4^n}\dbinom{2n}{n}$. D'après la formule de Stirling,

$$u_n = \frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)(2n)4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Par suite, la série numérique de terme général $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)4^n}\dbinom{2n}{n} = (-1)^{n-1}u_n$ converge absolument et donc converge.

• La fonction f est donc définie en $\dfrac{1}{4}$. Vérifions que f est continue en $\dfrac{1}{4}$.

Pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = a_n x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}x^n$. Pour chaque x de $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et la suite $((-1)^{n-1}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir du rang 1. Ensuite, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$,

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|x = \frac{2(2n-1)}{n+1}x \leqslant \frac{2(2n-1)}{n+1} \times \frac{1}{4} = \frac{4n-2}{4n+4} < 1.$$

On en déduit que pour chaque x de $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir du rang 1. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| = |a_{n+1}|x^{n+1} \leqslant \frac{|a_{n+1}|}{4^{n+1}} = u_{n+1},$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Sup}\left\{\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|,\ x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]\right\} \leqslant u_{n+1}$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que la série de fonction de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$, f est continue sur $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$ et en particulier en $\dfrac{1}{4}$.

Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)4^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}} \sqrt{1+4x} = \sqrt{1+4\times\frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)4^n} = \sqrt{2}.}$$

Exercice n° 6

1) Posons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\chi_A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$ puis $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(2,3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array}\right. & \Leftrightarrow X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \Leftrightarrow X_1' = DX_1 \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 \\ y_1' = 3y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x_1(t) = ae^{2t} \\ y_1(t) = be^{3t} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{3t} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + 2be^{3t} \\ ae^{2t} + be^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{2t} + 2be^{3t} \\ ae^{2t} + be^{3t} \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

2) Puisque la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les solutions réelles sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Un vecteur propre de A associé à la valeur propre i est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. On sait alors que les solutions complexes sur $\mathbb{R}$ du système homogène associé sont les fonctions de la forme $X\ :\ t \mapsto ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Déterminons alors les solutions réelles du système homogène.

$$\begin{aligned}
X \text{ réelle} & \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \overline{b}e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow b = \overline{a} \text{ (car la famille de fonctions } (t \mapsto e^{it}, t \mapsto e^{-it}) \text{ est libre.)}
\end{aligned}$$

Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ du système homogène sont les fonctions de la forme $X\ :\ t \mapsto ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + \overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = 2\mathrm{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\right)$, $a \in \mathbb{C}$. En posant $a = \alpha + i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\mathrm{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} (\alpha+i\beta)(\cos t + i\sin t) \\ (\alpha+i\beta)(1-i)(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} \alpha\cos t - \beta\sin t \\ \alpha(\cos t + \sin t) + \beta(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, le couple (α, β) décrit $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le couple $(2\alpha, 2\beta)$ décrit $\mathbb{R}^2$ et en renommant les constantes α et β, on obtient les solutions réelles du système homogène : $t \mapsto \alpha\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Résolution du système. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \alpha(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \beta(t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$ où α et β sont deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telles que pour tout réel t de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha'(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \beta'(t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Les formules de

CRAMER fournissent $\alpha'(t) = \dfrac{1}{\cos t}(\cos t - \sin t) = 1 - \dfrac{\sin t}{\cos t}$ et $\beta'(t) = -\dfrac{1}{\cos t}(\cos t + \sin t) = -1 - \dfrac{\sin t}{\cos t}$. On peut prendre $\alpha(t) = t + \ln(\cos t)$ et $\beta(t) = -t + \ln(\cos t)$ et on obtient la solution particulière

$$\begin{aligned} X(t) &= (t + \ln(\cos t)) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + (-t + \ln(\cos t)) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \ln(\cos t)(\cos t - \sin t) \\ 2t \sin t + 2 \cos t \ln(\cos t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + \ln(\cos t)(\cos t - \sin t) + \alpha \cos t - \beta \sin t \\ 2t \sin t + 2 \cos t \ln(\cos t) + \alpha(\cos t + \sin t) + \beta(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3) Puisque la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda - 4)(\lambda - 7)$. Un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre 4 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de A^T associé à la valeur propre 7 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs fournissent des combinaisons linéaires intéressantes des équations :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x + y)' = 4(x + y) + e^t + t \\ (x - 2y)' = 7(x - 2y) + e^t - 2t \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{l} x(t) + y(t) = -\dfrac{e^t}{3} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{16} + \lambda e^{4t} \\ x(t) - 2y(t) = -\dfrac{e^t}{6} + \dfrac{2t}{7} + \dfrac{2}{49} + \mu e^{7t} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -\dfrac{5e^t}{18} - \dfrac{3t}{42} - \dfrac{33}{1176} + \dfrac{2\lambda e^{4t} + \mu e^{4t}}{3} \\ y(t) = -\dfrac{e^t}{6} - \dfrac{15t}{28} - \dfrac{65}{1176} + \dfrac{\lambda e^{4t} - \mu e^{7t}}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

4) Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} &= (\lambda - 5) \left(\lambda^2 - 5\lambda + 2 \right) + 2(-\lambda) - (-\lambda + 2) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 26\lambda - 12 \\ &= (\lambda - 6) \left(\lambda^2 - 4\lambda + 2 \right) = (\lambda - 6) \left(\lambda - 2 + \sqrt{2} \right) \left(\lambda - 2 - \sqrt{2} \right), \end{aligned}$$

et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(A - 6I) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow z = 0 \text{ et } x = y.$$

$\operatorname{Ker}(A - 6I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \operatorname{Ker} \left(A - \left(2 + \sqrt{2} \right) I \right) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(3 - \sqrt{2} \right) x + y - z = 0 \\ 2x + \left(2 - \sqrt{2} \right) y - 2z = 0 \\ x - y - \left(1 + \sqrt{2} \right) z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \left(3 - \sqrt{2} \right) x + y \\ 2x + \left(2 - \sqrt{2} \right) y - 2 \left(\left(3 - \sqrt{2} \right) x + y \right) = 0 \\ x - y - \left(1 + \sqrt{2} \right) \left(\left(3 - \sqrt{2} \right) x + y \right) = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \left(3 - \sqrt{2} \right) x + y \\ \left(-4 + 2\sqrt{2} \right) x - \sqrt{2} y = 0 \\ -2\sqrt{2} x - \left(2 + \sqrt{2} \right) y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \left(-2\sqrt{2} + 2 \right) x \\ z = \left(3 - \sqrt{2} \right) x + \left(-2\sqrt{2} + 2 \right) x \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \left(2 - 2\sqrt{2} \right) x \\ z = \left(5 - 3\sqrt{2} \right) x \end{array} \right. . \end{aligned}$$

$\operatorname{Ker}\left(A-\left(2+\sqrt{2}\right)I\right)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\left(1, 2-2\sqrt{2}, 5-3\sqrt{2}\right)$. Un calcul conjugué montre que $\operatorname{Ker}\left(A-\left(2-\sqrt{2}\right)I\right)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\left(1, 2+2\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2}\right)$.

On sait alors que les solutions du système homogène sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto ae^{6t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+be^{\left(2+\sqrt{2}\right)t}\begin{pmatrix}1\\2-2\sqrt{2}\\5-3\sqrt{2}\end{pmatrix}+ce^{\left(2-\sqrt{2}\right)t}\begin{pmatrix}1\\2+2\sqrt{2}\\5+3\sqrt{2}\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

5) Posons $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. $\chi_A=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\1&\lambda&0\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=(\lambda-1)^3$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON permet alors d'affirmer que $(A-I_3)^3=0$.

On sait que les solutions du système $X'=AX$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto e^{tA}X_0$ où $X_0\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or, pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{tA}&=e^{t(A-I)}\times e^{tI}\text{ (car les matrices } t(A-I)\text{ et } tI \text{ commutent)}\\
&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\times e^tI=e^t\left(\sum_{n=0}^{2}\frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\\
&=e^t\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\right)\\
&=e^t\begin{pmatrix}1+t&t&0\\-t&1-t&0\\t&t&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les solutions du système sont les fonctions de la forme $t\mapsto e^{tA}X_0=e^t\begin{pmatrix}1+t&t&0\\-t&1-t&0\\t&t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+(a+b)t)e^t\\(b-(a+b)t)e^t\\((a+b)t+c)e^t\end{pmatrix}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Maintenant,

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=1\\c=-1\end{array}\right..$$

La solution cherchée est $t\mapsto\begin{pmatrix}te^t\\(1-t)e^t\\(t-1)e^t\end{pmatrix}$.

Exercice n° 7

Soit $A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $t\in\mathbb{R}$, posons $g(t)=\|X(t)\|_2^2=(X(t)|X(t))$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$g'(t)=2\left(X(t)|X'(t)\right)=2\left(X(t)|AX(t)\right)=2(X(t))^TAX(t)\geqslant 0\text{ car }A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Ainsi, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction $\sqrt{g}\ :\ t\mapsto\|X(t)\|_2$.

Exercice n° 8

1) Puisque les fonctions $t\mapsto\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}&\frac{1}{2t^2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2t}\end{pmatrix}$ et $t\mapsto\begin{pmatrix}2t\\t^2\end{pmatrix}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, l'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Le couple de fonctions $(x,y)=(1,t)$ est solution du système homogène associé sur $]0,+\infty[$. Pour chaque réel strictement positif t, les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ car $\begin{vmatrix}1&0\\t&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Cherchons alors les solutions du système homogène sous la forme $t\mapsto\alpha(t)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}+\beta(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(t)\\t\alpha(t)+\beta(t)\end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2t^2}y \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2t}y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha' = -\dfrac{1}{2t}\alpha + \dfrac{1}{2t^2}(t\alpha+\beta) \\ t\alpha' + \alpha + \beta' = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2t}(t\alpha+\beta) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha' = \dfrac{\beta}{2t^2} \\ t\alpha' + \beta' = \dfrac{\beta}{2t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha' = \dfrac{\beta}{2t^2} \\ \dfrac{\beta}{2t} + \beta' = \dfrac{\beta}{2t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta' = 0 \\ \alpha' = \dfrac{\beta}{2t^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left\{\begin{array}{l} \beta(t) = \lambda \\ \alpha'(t) = \dfrac{\lambda}{2t^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left\{\begin{array}{l} \beta(t) = \lambda \\ \alpha(t) = -\dfrac{\lambda}{2t} + \mu \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left\{\begin{array}{l} x(t) = -\dfrac{\lambda}{2t} + \mu \\ y(t) = \dfrac{\lambda}{2} + \mu t \end{array}\right.$$

Maintenant, pour tout réel strictement positif t, $w(t) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2t} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ et donc les deux fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont deux solutions indépendantes du système homogène sur $]0,+\infty[$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ du système homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variations des constantes.

Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que pour tout réel strictement positif t, $\lambda'(t) \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Les formules de Cramer fournissent $\lambda'(t) = \dfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ t^2 & t \end{vmatrix} = -t^2$ et $\mu'(t) = \dfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2t} & 2t \\ \dfrac{1}{2} & t^2 \end{vmatrix} = \dfrac{3t}{2}$. On peut prendre $\lambda(t) = -\dfrac{t^3}{3}$ et $\mu(t) = \dfrac{3t^2}{4}$ et on obtient la solution particulière $X(t) = -\dfrac{t^3}{3} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} + \dfrac{3t^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t^2/12 \\ 7t^3/12 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{11t^2}{12} - \dfrac{\lambda}{2t} + \mu \\ \dfrac{7t^3}{12} + \dfrac{\lambda}{2} + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

2) Puisque les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ -3t \end{pmatrix}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution du système homogène associé. Les couples de fonctions $X_1 = (t,-1)$ et $X_2 = (1,t)$ sont solutions du système homogène associé sur $\mathbb{R}$. De plus, pour chaque réel t, $w(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0$. Le couple de fonctions

(X_1, X_2) est donc un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ du système homogène $X' = AX$. Les fonctions solutions du système homogène $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variation des constantes.
Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t) \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel t, $\lambda'(t) \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \dfrac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ -3t \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \dfrac{1}{t^2+1} \begin{vmatrix} (2t^2-1)/(t^2+1) & 1 \\ -3t/(t^2+1) & t \end{vmatrix} = \dfrac{2t^3+2t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{2t}{t^2+1}$ et $\mu'(t) = \dfrac{1}{t^2+1} \begin{vmatrix} t & (2t^2-1)/(t^2+1) \\ -1 & -3t/(t^2+1) \end{vmatrix} = \dfrac{-t^2-1}{(t^2+1)^2} = -\dfrac{1}{t^2+1}$. On peut prendre $\lambda(t) = \dfrac{1}{2} \ln\left(t^2+1\right)$ et $\mu(t) = \operatorname{Arctan} t$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{t}{2}\ln(1+t^2) + \operatorname{Arctan} t + \lambda t + \mu \\ -\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \dfrac{3t^2}{t^2+1} + t \operatorname{Arctan} t - \lambda + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3) Si de plus $y = \dfrac{1}{x}$, le système s'écrit $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - \dfrac{1}{x} \\ -\operatorname{sh}(2t)\dfrac{x'}{x^2} = -x + \operatorname{ch}(2t)\dfrac{1}{x} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - \dfrac{1}{x} \\ \operatorname{sh}(2t)x' = x^3 - \operatorname{ch}(2t)x \end{cases}$. On obtient $x^3 - \operatorname{ch}(2t)x = \operatorname{ch}(2t)x - \dfrac{1}{x}$ ou encore $x^4 - 2\operatorname{ch}(2t)x^2 + 1 = 0$. Ensuite,

$$x^4 - 2\operatorname{ch}(2t)x^2 + 1 = (x^2 - \operatorname{ch}(2t))^2 - \operatorname{sh}^2(2t) = (x^2 - e^{2t})(x^2 - e^{-2t}) = (x - e^t)(x + e^t)(x - e^{-t})(x + e^{-t}).$$

Ainsi, nécessairement $(x, y) \in \{(e^t, e^{-t}), (e^{-t}, e^t), (-e^t, -e^{-t}), (-e^{-t}, e^t)\}$. Réciproquement, si $(x, y) = (e^t, e^{-t})$,

$$\operatorname{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) - e^{-t} = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \operatorname{sh}(2t)e^t = \operatorname{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \operatorname{ch}(2t)y = -e^t + \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) = \frac{1}{2}(-e^t + e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\operatorname{sh}(2t)e^{-t} = \operatorname{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_1 = (x, y) = (e^t, e^{-t})$ est une solution non nulle du système. De même, si $(x, y) = (e^{-t}, e^t)$,

$$\operatorname{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) - e^t = \frac{1}{2}(-e^t - e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\operatorname{sh}(2t)e^{-t} = \operatorname{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \operatorname{ch}(2t)y = -e^{-t} + \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \operatorname{sh}(2t)e^t = \operatorname{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_2 = (x, y) = (e^{-t}, e^t)$ est une solution non nulle du système. Enfin, $w(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} - e^{-2t} = 2\operatorname{sh}(2t) \neq 0$ et le couple (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu e^{-t} \\ \lambda e^{-t} + \mu e^t \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice n° 9

1) Sur $I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, (E) s'écrit $y'' + \dfrac{4x-2}{2x+1}y' - \dfrac{8}{2x+1}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{4x-2}{2x+1}$ et $x \mapsto -\dfrac{8}{2x+1}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Recherche d'une solution polynomiale non nulle de (E)**.** Soit P un éventuel polynôme non nul solution de (E). On note n son degré. Le polynôme $Q = (2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P$ est de degré au plus n. De plus, le coefficient de X^n dans Q est $(4n-8)\mathrm{dom}(P)$. Si P est solution de (E), on a nécessairement $(4n-8)\mathrm{dom}(P) = 0$ et donc $n = 2$.
Posons alors $P = aX^2 + bX + c$.

$$(2X+1)P''+(4X-2)P'-8P=(2X+1)(2a)+(4X-2)(2aX+b)-8(aX^2+bX+c)=-4bX+2a-2b-8c$$

Par suite, P est solution de (E) sur I si et seulement si $-4b=2a-2b-8c=0$ ce qui équivaut à $b=0$ et $a=4c$. La fonction $f_1\ :\ x\mapsto 4x^2+1$ est donc une solution non nulle de (E) sur I.

Recherche d'une solution particulière de la forme $f_\alpha\ :\ x\mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

$$(2x+1)(e^{\alpha x})''+(4x-2)(e^{\alpha x})'-8e^{\alpha x}=\left(\alpha^2(2x+1)+\alpha(4x-2)-8\right)e^{\alpha x}=\left(2\alpha(\alpha+2)x+\alpha^2-2\alpha-8\right)e^{\alpha x}$$

Par suite, f_α est solution de (E) sur I si et seulement si $2\alpha(\alpha+2)=\alpha^2-2\alpha-8=0$ ce qui équivaut à $\alpha=-2$. Ainsi, la fonction $f_2\ :\ x\mapsto e^{-2x}$ est solution de (E) sur I.

Résolution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Vérifions que le couple (f_1,f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Pour $x>-\frac{1}{2}$,

$$w(x)=\begin{vmatrix}4x^2+1 & e^{-2x}\\ 8x & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=(-8x^2-8x-2)e^{-2x}=-2(2x+1)^2e^{-2x}\neq 0.$$

Donc le couple (f_1,f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[}=\left\{x\mapsto\lambda(4x^2+1)+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a aussi $\mathscr{S}_{\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[}=\left\{x\mapsto\lambda(4x^2+1)+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\lambda_1(4x^2+1)+\mu_1e^{-2x}\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ \lambda_2(4x^2+1)+\mu_2e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$ (par continuité à gauche en $-\frac{1}{2}$).

f ainsi définie est deux fois dérivables sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, solution de (E) sur chacun de ces deux intervalles et vérifie encore (E) en $x=-\frac{1}{2}$ si de plus f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$.

En résumé, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est deux fois dérivables en $-\frac{1}{2}$.

f est déjà deux fois dérivable à gauche en $-\frac{1}{2}$. De plus, en posant $h=x+\frac{1}{2}$ ou encore $x=-\frac{1}{2}+h$, on obtient quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures

$$f(x)=\lambda_1(2-4h+4h^2)+\mu_1ee^{-2h}=(2\lambda_1+e\mu_1)+(-4\lambda_1-2e\mu_1)h+(4\lambda_1+2e\mu_1)h^2+o(h^2),$$

et de même quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures, $f(x)=(2\lambda_2+e\mu_2)+(-4\lambda_2-2e\mu_2)h+(4\lambda_2+2e\mu_2)h^2+o(h^2)$.
Par suite, f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$ si et seulement si $2\lambda_1+e\mu_1=2\lambda_2+e\mu_2$ ou encore $\mu_2=\frac{2}{e}(\lambda_1-\lambda_2)+\mu_1$.

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\begin{cases}a(4x^2+1)+be^{-2x}\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ c(4x^2+1)+\left(\frac{2}{e}(a-c)+b\right)e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Ainsi, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 3 et une base de cet espace est par exemple (f_1,f_2,f_3) où $f_1\ :\ x\mapsto\begin{cases}4x^2+1\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{e}e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$, $f_2\ :\ x\mapsto e^{-2x}$ et $f_3\ :\ x\mapsto\begin{cases}0\text{ si }x\leqslant-\frac{1}{2}\\ 4x^2+1-\frac{2}{e}e^{-2x}\text{ si }x>-\frac{1}{2}\end{cases}$.

2) Sur $I=]0,+\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y''-\frac{2}{x+1}y'+\frac{2}{x(x+1)}y=0$. Puisque les deux fonctions $x\mapsto-\frac{2}{x+1}$ et $x\mapsto\frac{2}{x(x+1)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

La fonction $f_1 : x \mapsto x$ est solution de (E) sur I. Posons alors $y = f_1 z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur I, la fonction y est deux fois dérivables sur I si et seulement si la fonction z est deux fois dérivables sur I. De plus, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned}(x^2+x)y''-2y'+2y &= (x^2+x)(f_1''z+2f_1'z'+f_1z'')-2x(f_1'z+f_1z')+2f_1z\\ &= (x^2+x)f_1z''+(2(x^2+x)f_1'-2xf_1)z'+((x^2+x)f_1''-2xf_1'+2f_1)z\\ &= (x^3+x^2)z''+2xz'.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (x^3+x^2)z''(x)+2xz'(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ z''(x)+\frac{2}{x(x+1)}z'(x)=0 \Leftrightarrow \forall x\in I,\ \left(e^{2\ln|x|-2\ln|x+1|}z'\right)'(x)=0\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ z'(x)=\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in I,\ z(x)=\lambda\left(x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)+\mu\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in I,\ y(x)=\lambda(x^2+2x\ln|x|-1)+\mu x.\end{aligned}$$

3) Cherchons les solutions développables en série entière. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle on suppose a priori $R_a>0$. Pour $x\in]-R_a,R_a[$, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n$. f est deux fois dérivable sur $]-R_a,R_a[$ et les dérivées premières et secondes de f s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour $x\in]-R_a,R_a[$,

$$\begin{aligned}4xf''(x)-2f'(x)+9x^2f(x) &= 4x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\ &= 4\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=3}^{+\infty}a_{n-3}x^{n-1}\\ &= -2a_1+4a_2x+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(2n(2n-3)a_n+9a_{n-3}\right)x^{n-1}\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière et toujours sous l'hypothèse $R_a>0$, f est solution de (E) sur $]-R_a,R_a[$ si et seulement si $a_1=a_2=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $2n(2n-3)a_n+9a_{n-3}=0$ ce qui s'écrit encore

$$a_1=a_2=0 \text{ et } \forall n\geqslant 3,\ a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}.$$

Les conditions $a_1=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $a_n=-\dfrac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p+1}=0$ et les conditions $a_2=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $a_n=-\dfrac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p+2}=0$.

Enfin les conditions $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $a_{3p}=-\dfrac{9}{6p(6p-3)}a_{3p-3}=-\dfrac{1}{2p(2p-1)}a_{3(p-1)}$ sont équivalentes pour $p\geqslant 1$ à

$$a_{3p}=-\frac{1}{2p(2p-1)}\times-\frac{1}{(2p-2)(2p-3)}\times\ldots\times-\frac{1}{2\times 1}a_0=\frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

En résumé, sous l'hypothèse $R_a>0$, f est solution de (E) sur $]-R_a,R_a[$ si et seulement si

$$\forall x\in]-R_a,R_a[,\ f(x)=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}.$$

Réciproquement, puisque pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}=0$ d'après un théorème de croissances comparées, $R_a=+\infty$ pour tout choix de a_0 ce qui valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n}$, $x \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^{3/2})^{2n} = \cos\left(x^{3/2}\right).$$

Donc la fonction $x \mapsto \cos\left(x^{3/2}\right)$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. La forme de cette solution nous invite à changer de variable en posant $t = x^{3/2}$. Plus précisément, pour $x > 0$, posons $y(x) = z(x^{3/2}) = z(t)$. Puisque l'application $\varphi \ : \ x \mapsto x^{3/2}$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ ainsi que sa réciproque, la fonction y est deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$, on a $y(x) = z(x^{3/2})$ puis $y'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} z'(x^{3/2})$ puis $y''(x) = \frac{3}{4} x^{-1/2} z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4} x z''(x^{3/2})$ et donc

$$\begin{aligned}
4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2 y(x) &= 4x\left(\frac{3}{4} x^{-1/2} z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4} x z''(x^{3/2})\right) - 2\left(\frac{3}{2} x^{1/2} z'(x^{3/2})\right) + 9x^2 z(x^{3/2}) \\
&= 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})) = 0 \Leftrightarrow \forall t > 0,\ z''(t) + z(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t > 0,\ z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x > 0,\ y(x) = \lambda \cos(x^{3/2}) + \mu \sin(x^{3/2}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda \cos(x^{3/2}) + \mu \sin(x^{3/2}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

4) Puisque les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1+x}$ sont continues sur $]-1, +\infty[$, les solutions de (E) sur $]-1, +\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Résolution de l'équation homogène.
La fonction $f_1 \ : \ x \mapsto e^x$ est solution sur $]-1, +\infty[$ de l'équation $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$. Posons alors $y = f_1 z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]-1, +\infty[$. De plus, la formule de Leibniz permet d'écrire pour $x > -1$

$$\begin{aligned}
(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) &= (1+x)(f_1'' z(x) + 2f_1'(x)z'(x) + f_1(x)z''(x)) - 2(f_1'(x)z(x) + f_1(x)z'(x)) \\
&\quad + (1-x)f_1(x)z(x) \\
&= (1+x)f_1(x)z''(x) + (2(1+x)f_1'(x) - 2f_1(x))z'(x) \\
&= ((1+x)z''(x) + 2xz'(x))e^x.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_H) \text{ sur }]-1, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x > -1,\ (1+x)z''(x) + 2xz'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > -1,\ z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right) z'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x > -1,\ e^{2x - 2\ln(1+x)} z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right) e^{2x - 2\ln(1+x)} z'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x > -1,\ \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^2} z'\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x > -1,\ z'(x) = \lambda (x+1)^2 e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\int (x+1)^2 e^{-2x}\ dx &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} + \int (x+1)e^{-2x}\ dx = -\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\ dx \\
&= \left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + C = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}\right) e^{-2x} + C \\
&= -\frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 5)e^{-2x} + C
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_H) \text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > -1,\ z'(x) = \lambda(x+1)^2 e^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > -1,\ z(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x} + \mu \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > -1,\ y(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^{x}.
\end{aligned}$$

Maintenant, λ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si $-\dfrac{\lambda}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et en renommant la constante λ, les solutions de (E_H) sur $]-1,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^{x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière de (E)**.** Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière de la forme $f_0\ :\ x \mapsto (ax+b)e^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(1+x)((ax+b)e^{-x})'' - 2((ax+b)e^{-x})' + (1-x)(ax+b)e^{-x} &= ((1+x)((ax+b)-2a) - 2(-(ax+b)+a) \\
&\quad + (1-x)(ax+b))e^{-x} \\
&= (2ax + (4b-4a))e^{-x}.
\end{aligned}$$

Par suite, f_0 est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si $2a = 1$ et $4b-4a = 0$ ce qui équivaut à $a = b = \dfrac{1}{2}$. Une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}e^{-x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mu e^{x} + \frac{x+1}{2}e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

5) Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est $z^2+4z+4 = 0$. Puisque cette équation admet -2 pour racine double, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-2x} + \mu(x)xe^{-2x}$ où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)xe^{-2x} = 0 \\ -2\lambda'(x)e^{-2x} + \mu'(x)(-2x+1)e^{-2x} = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}\right.$ ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'(x) + \mu'(x)x = 0 \\ -2\lambda'(x) + \mu'(x)(-2x+1) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}\right. .$$

Les formules de Cramer fournissent $\lambda'(x) = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} & (-2x+1) \end{vmatrix} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\mu'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. On peut prendre $\lambda(x) = -\sqrt{x^2+1}$ et $\mu(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ puis $f_0(x) = \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)e^{-2x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\lambda + \mu x - \sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Exercice n° 10

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -f(-x) + e^{x}$. On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = f'(-x) + e^{x} = -f(x) + e^{-x} + e^{x},$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}(x)$. Par suite, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ch}(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.

Réciproquement, soit f une telle fonction. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)+f(-x)=(\mathrm{sh}(x)-\lambda\sin(x)+\mu\cos(x))+(\mathrm{ch}(x)+\lambda\cos(x)-\mu\sin(x))=e^x+(\lambda+\mu)(\cos(x)-\sin(x)),$$

et f est solution si et seulement si $\lambda+\mu=0$.

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto \mathrm{ch}(x)+\lambda(\cos(x)-\sin(x))$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=f\left(\dfrac{3}{16x}\right)$. On en déduit que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x)=-\frac{3}{16x^2}f'\left(\frac{3}{16x}\right)=-\frac{3}{16x^2}f\left(\frac{3/16}{(3/16)/x}\right)=-\frac{3}{16x^2}f(x),$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y''+\dfrac{3}{16}y=0$ (E). Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Cherchons une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ de la forme $g_\alpha\ :\ x\mapsto x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}g_\alpha \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{3}{16}x^\alpha=0\Leftrightarrow \alpha^2-\alpha+\frac{3}{16}=0\\ &\Leftrightarrow \alpha=\frac14 \text{ ou } \alpha=\frac34.\end{aligned}$$

Les deux fonctions $f_1\ :\ x\mapsto x^{1/4}$ et $f_2\ :\ x\mapsto x^{3/4}$ sont solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Le wronskien de ces solutions est $w(x)=\begin{vmatrix} x^{1/4} & x^{3/4}\\ \frac14 x^{-3/4} & \frac34 x^{-1/4}\end{vmatrix}=\dfrac12\neq 0$ et donc (f_1,f_2) est un système fondamental de solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Ainsi, si f est solution du problème, nécessairement $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x>0$, $f(x)=\lambda_1x^{1/4}+\lambda_2x^{3/4}$.

Réciproquement, soit f une telle fonction.

Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\dfrac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}$ et $f\left(\dfrac{3}{16x}\right)=\dfrac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\dfrac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}$. Donc

$$\begin{aligned}f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{4}=\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8} \text{ et } \frac{3\lambda_2}{4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}\Leftrightarrow \lambda_2=\frac{2}{3^{3/4}}\lambda_1.\end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda\left(x^{1/4}+2\left(\dfrac{x}{3}\right)^{3/4}\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 12

La fonction nulle est solution. Dorénavant, f est une éventuelle solution non nulle. Il existe donc $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)\neq 0$.

• L'égalité $f(x_0)f(0)=\displaystyle\int_{x_0-0}^{x_0+0}f(t)\ dt=0$ fournit $f(0)=0$.

• Pour tout réel y, $\displaystyle\int_{-y}^{y}f(t)\ dt=f(0)f(y)=0$. Maintenant, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $y\mapsto \displaystyle\int_{-y}^{y}f(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient pour tout réel y, $f(y)+f(-y)=0$ et donc f est impaire.

• Pour tout réel y, on a alors $f(y)=\dfrac{1}{f(x_0)}\displaystyle\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\ dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{f(x_0)}\displaystyle\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f. Mais alors la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{f(x_0)}\displaystyle\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\ dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

• En dérivant à y fixé ou x fixé l'égalité $f(x)f(y)=\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\ dt$, on obtient pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f'(x)f(y)=f(x+y)-f(x-y)$ et $f(x)f'(y)=f(x+y)+f(x-y)$. En dérivant la première égalité à y fixé et la deuxième à x fixé, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$. En particulier, pour tout réel x, $f''(x)f(x_0) - f(x)f''(x_0) = 0$ ou encore $f''(x) - kf(x) = 0$ où $k = \dfrac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.

$$f \text{ est solution d'une équation différentielle du type } y'' - ky = 0.$$

• f est donc de l'un des types suivants : $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ ou $x \mapsto ax + b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ou $x \mapsto \lambda\,\mathrm{ch}(\omega x) + \mu\,\mathrm{sh}(\omega x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega > 0$ (suivant que $k > 0$, $k = 0$ ou $k < 0$). De plus, f étant impaire, f est nécessairement de l'un des types suivants :

$$x \mapsto \lambda\sin(\omega x),\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \omega > 0 \text{ ou } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}^* \text{ ou } x \mapsto \lambda\,\mathrm{sh}(\omega x),\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \omega > 0.$$

Réciproquement,

- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x)f(y) = a^2xy$ et $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{a}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2axy$. Donc f est solution si et seulement si $a = 2$. On obtient la fonction solution $x \mapsto 2x$.
- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\sin(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2\sin(\omega x)\sin(\omega y)$ et $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{\omega}(\cos(\omega(x-y)) - \cos(\omega(x+y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\sin(\omega x)\sin(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \dfrac{2}{\omega}$. On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \dfrac{2}{\omega}\sin(\omega x)$, $\omega > 0$.
- si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\,\mathrm{sh}(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\omega > 0$, alors $f(x)f(y) = \lambda^2\,\mathrm{sh}(\omega x)\,\mathrm{sh}(\omega y)$ et $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{\omega}(\mathrm{ch}(\omega(x+y)) - \mathrm{ch}(\omega(x-y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\mathrm{sh}(\omega x)\,\mathrm{sh}(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda = \dfrac{2}{\omega}$. On obtient les fonctions solutions $x \mapsto \dfrac{2}{\omega}\mathrm{sh}(\omega x)$, $\omega > 0$.

Exercice n° 13

Existence de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$**.** Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$F \text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Dérivées de F. Soient $a > 0$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour tout réel $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

De plus

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[a,+\infty[$.
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{te^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2e^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$ où les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car dominées en $+\infty$ par $\dfrac{1}{t^2}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), F est deux fois dérivable sur $[a,+\infty[$ et les dérivées de F s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

$$\forall x > 0,\ F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

Equation différentielle vérifiée par F. Pour $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

$$\forall x > 0,\ F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

Existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$. Soit $a > 0$. Montrons l'existence de $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

Soit $A > a$. Une intégration par parties fournit $\int_a^A \frac{\sin u}{u}\,du = -\frac{\cos a}{a} + \frac{\cos A}{A} - \int_a^A \frac{\cos u}{u^2}\,du$. Puisque $\left|\frac{\cos A}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$. D'autre part, puisque $\forall u \geqslant a$, $\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \frac{1}{u^2}$, la fonction $u \mapsto \frac{\cos u}{u^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et en particulier, $\int_a^A \frac{\cos u}{u^2}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_a^A \frac{\sin u}{u}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$ ou encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge en $+\infty$. De même, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge en $+\infty$.

Mais alors, pour $x > 0$,

$$\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = G(x) \text{ existe.}$$

$$G \text{ est définie sur }]0, +\infty[.$$

Equation différentielle vérifiée par G. Puisque la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De même, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ puis G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\cos x \sin x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du, \end{aligned}$$

puis en redérivant

$$G''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{\sin^2 x}{x} + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos^2 x}{x} = -G(x) + \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0,\ G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}.$$

Limites de F et G en $+\infty$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ sont deux intégrales convergentes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $|F(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$

Egalité de F et G. D'après ce qui précède, $(F-G)'' + (F-G) = 0$ et donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) - G(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, alors $\lambda \cos x + \mu \sin x = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cos(x - x_0)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x) - G(x)) = 0$, on a nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et donc $F - G = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.}$$

Remarque. On peut montrer que l'égalité persiste quand $x = 0$ (par continuité) et on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.