Planche n° 21. Equations différentielles linéaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (**)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle proposée :

1) $y' + y = 1$ **2)** $2y' - y = \cos x$ **3)** $y' - 2y = xe^{2x}$ **4)** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ **5)** $y'' + 4y = \cos(2x)$
6) $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Exercice n° 2 (* I)**

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On suppose que quand x tend vers $+\infty$, $f' + \alpha f$ tend vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers $\dfrac{\ell}{\alpha}$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f + f' + f'')(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
On note D l'opérateur de dérivation. Soit P un polynôme de degré n unitaire dont tous les zéros ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice n° 3 (* I)**

Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$.

Exercice n° 4 (* I)**

Résoudre sur l'intervalle I proposé :

1) $xy' - 2y = 0$ $(I = \mathbb{R})$ **2)** $xy' - y = 0$ $(I = \mathbb{R})$ **3)** $xy' + y = 0$ $(I = \mathbb{R})$ **4)** $xy' - 2y = x^3$ $(I =]0, +\infty[)$
5) $x^2y' + 2xy = 1$ $(I = \mathbb{R})$ **6)** $2x(1 - x)y' + (1 - x)y = 1$ $(I =]-\infty, 0[,\ ]0, 1[,\ ]1, +\infty[,\ ]-\infty, 1[,\ ]0, +\infty[,\ \mathbb{R})$
7) $|x|y' + (x - 1)y = x^3$ $(I = \mathbb{R})$.

Exercice n° 5 (* I)**

Déterminer le rayon de convergence puis calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)4^n}$.

Exercice n° 6 (**)

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{array}\right.$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **3)** $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + z \end{array}\right.$ **5)** $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = -x \\ z' = x + y + z \end{array}\right.$ (trouver la solution telle que $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = -1$).

Exercice n° 7 (**)

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8 (**)

Résoudre les systèmes

1) $\left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2t^2}y + 2t \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2t}y + t^2 \end{array}\right.$ sur $]0, +\infty[$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} (t^2 + 1)x' = tx - y + 2t^2 - 1 \\ (t^2 + 1)y' = x + ty - 3t \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - y \\ \operatorname{sh}(2t)y' = -x + \operatorname{ch}(2t)y \end{array}\right.$ sur $]0, +\infty[$ sachant qu'il existe une solution vérifiant $xy = 1$.

Exercice n° 9 (* I)**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$ sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.

2) $(x^2+x)y''-2xy'+2y=0$ sur $]0,+\infty[$.

3) **(I)** $4xy''-2y'+9x^2y=0$ sur $]0,+\infty[$.

4) $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=xe^{-x}$ sur $]-1,+\infty[$.

5) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice n° 10 (**)

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=e^x$.

Exercice n° 11 (***)

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ vérifiant $\forall x>0,\ f'(x)=f\left(\dfrac{3}{16x}\right)$.

Exercice n° 12 (* I)**

Trouver toutes les applications $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\ dt$.

Exercice n° 13 (* I)**

Montrer que $\forall x>0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\ dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\ dt$ (on déterminera une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f et g).