FICHE n° 21. EQUATIONS CARTÉSIENNES DE DROITES.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I Equations cartésiennes de droites

1 Vecteur directeur d'une droite. Coefficient directeur d'une droite non parallèle à (Oy)

Définition 1

Soit (Δ) une droite. Un **vecteur directeur** de la droite (Δ) est un vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de la droite (Δ).

Si de plus (Δ) n'est pas parallèle à (Oy), le **coefficient directeur** (ou la **pente**) de (Δ) est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

2 Déterminer une équation cartésienne de droite

Soit (D) la droite passant par le point $A\left(x_A, y_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ où l'un des deux réels α ou β au moins est non nul.

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in (D) &\Leftrightarrow \text{ les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow \beta\left(x - x_A\right) - \alpha\left(y - y_A\right) = 0.
\end{aligned}$$

En développant puis en réduisant, on obtient une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où l'un au moins des deux réels a ou b est non nul. Donc,

Théoreme 1

Toute droite du plan admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$ où l'un des deux réels a ou b au moins est non nul.

Théoreme 2

Réciproquement, soient a, b et c trois réels, l'un des deux réels a ou b étant non nul. L'ensemble d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Théoreme 3

Une droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation du type $y = k$ où k est un réel donné. En particulier, une équation de l'axe des abscisses est $y = 0$.
Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation du type $x = k$ où k est un réel donné. En particulier, une équation de l'axe des ordonnées est $x = 0$.

3 Equation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Théoreme 4

Soit (Δ) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. (Δ) admet une équation de la forme $y = ax + b$ et une seule. Cette équation s'appelle **l'équation réduite** de la droite (Δ).

De plus, le **coefficient directeur** de la droite (Δ) est a. b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite (Δ).
Un vecteur directeur de la droite (Δ) est le vecteur $\vec{u}(1, a)$.

☞ *Il faut noter que l'on dit **une** équation de (Δ) (car il n'y en a pas qu'une) et **l'**équation réduite de (Δ) (car il n'y en a qu'une).*

II Intersection de droites

1 Position relative de deux droites du plan

Théoreme 5

Soient a, b, c, a', b' et c' six réels tels que l'un des deux réels a ou b au moins est non nul et l'un des deux réels a' ou b' au moins est non nul.
Soient (Δ) la droite d'équation $ax+by+c=0$ dans le repère $\mathscr{R}$ et (Δ') la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.
Les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$.

Théoreme 6

Soient a, b, a' et b' quatre réels. Soient (Δ) la droite d'équation $y=ax+b$ dans le repère $\mathscr{R}$ et (Δ') la droite d'équation $y=a'x+b'$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si $a=a'$.
Les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes si et seulement si $a\neq a'$.

2 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{array}\right.$, on dispose de deux méthodes.

MÉTHODE PAR SUBSTITUTION.

Dans une des deux équations (au choix), on exprime une des deux inconnues (au choix) en fonction de l'autre puis on remplace (ou on substitue) cette inconnue dans l'autre équation par l'expression obtenue.

Exemple. $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-1=0\\ 3x+2y+5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x+1\\ 3x+2(-2x+1)+5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x+1\\ -x+7=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=-2\times 7+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=-13\end{array}\right.$.

MÉTHODE PAR ADDITION (on dit aussi MÉTHODE PAR COMBINAISONS).

On multiplie les deux équations par des nombres de manière à ce que l'une des inconnues disparaisse quand on additionne membre à membre les deux équations obtenues.

Exemple. $\left\{\begin{array}{ll} 2x+y-1=0 & (\times 2)\\ 3x+2y+5=0 & (\times(-1))\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y-2=0\\ -3x-2y-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x-7=0 & ((\mathrm{I})+(\mathrm{II}))\\ -3x-2y-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=-13\end{array}\right.$.

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{array}\right.$ équivaut à déterminer les points communs aux droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
Donc, le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{array}\right.$ admet un et un seul couple solution si et seulement si les droites (Δ) et (Δ') ne sont pas parallèles ce qui équivaut à $ab'-a'b\neq 0$.