Planche n° 21. Continuité : étude globale

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*I)**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose $f(x) = d(x, A) = \text{Inf}\{|y-x|,\ y \in A\}$. Montrer que f est Lipschitzienne.

Exercice n° 2 (I)**

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice n° 3 (I)**

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell \in [0, 1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice n° 4 (****)

Soit f croissante de $[a, b]$ dans lui-même. Montrer que f a un point fixe.

Exercice n° 5 (****)

Soit f croissante sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

Exercice n° 6 (***)

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout réel positif x, on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$. Trouver un exemple où f n'est pas constante (et donc pas continue).

Exercice n° 7 (*I)**

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice n° 8 (**)

Soit f de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\forall (x, y) \in ([0, 1])^2,\ |f(y) - f(x)| \geqslant |x - y|$. Montrer que $f = \text{Id}$ ou $f = 1 - \text{Id}$.

Exercice n° 9 (****)

Trouver les fonctions bijectives de $[0, 1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0, 1],\ f(2x - f(x)) = x$.

Exercice n° 10 (*I)**

Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$ et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1) Soit n un entier naturel non nul et soit $a = \dfrac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x + a) = f(x)$ admet au moins une solution.

2) Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0, 1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x + a) = f(x)$ n'ait pas de solution.

3) Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.

- **a)** Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
- **b)** Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
- **c)** Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.

Exercice n° 11 (T)**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, xy - y^3) \end{array}$. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

