# Planche n° 20. Normes matricielles. Suites et séries matricielles. Corrigé

**Exercice n° 1**

**1)** $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \text{Max}\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty} \leqslant n$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0B_0\|_\infty = \|nA_0\|_\infty = n$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty} = n$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = n.}$$

En particulier, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative (pour $n \geqslant 2$).

**2)** $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{i,j}| = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} |a_{i,j}|\,|b_{k,l}| = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|\right)\left(\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} |b_{k,l}|\right) \\
&= \|A\|_1\|B\|_1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1} \leqslant 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_0 = E_{1,1}$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = 1.}$$

En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.

• $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,j}^2\right) \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} b_{l,j}^2\right) = \|A\|_2^2\|B\|_2^2
\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\dfrac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2} \leqslant 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_0 = E_{1,1}$ et donc $\dfrac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\} = 1}$$

En particulier, $\|\ \|_2$ est une norme sous-multiplicative.

**Exercice nº 2**

Soit $N$ une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice précédent, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.

Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $N$ et $\|\ \|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha\|\ \|_1 \leqslant N \leqslant \beta\|\ \|_1$.

Pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.

**Remarque.** Le résultat précédent signifie que $N' = kN$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = kN(AB) \leqslant k^2N(A)N(B) = kN(A)kN(B) = N'(A)N'(B).$$

**Exercice nº 3**

Non, car si $A = E_{1,1} \neq 0$ et $B = E_{2,2} \neq 0$ (qui a un sens pour $n \geqslant 2$) alors $AB = 0$ puis $N(AB) < N(A)N(B)$.

**Exercice nº 4**

Soit $a \in ]0,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $A_n = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} & -\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \\ \dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$. Les sommes des carrés des deux nombres $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}$ et $\dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}$ est égale à 1. Donc il existe un réel $\theta_n \in ]-\pi,\pi]$ tel que $\cos(\theta_n) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin(\theta_n) = \dfrac{a/n}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}}$.
De plus, $\cos(\theta_n) > 0$ et $\sin(\theta_n) > 0$ et donc on peut prendre

$$\theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$A_n^n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\dfrac{n}{2}\ln\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\dfrac{a^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$.

D'autre part, $n\theta_n = n\,\text{Arctan}\left(\dfrac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{a}{n} = a$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^n = 1.\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

**Remarque.** $A_n = I_2 + \dfrac{1}{n}J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. L'exercice n$^o$ 10 montre que l'on a calculé $\exp(J)$. Calculons $\exp(J)$ de manière plus classique : $J = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\,(ia, -ia)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}
\exp(J) &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} e^{ia} & e^{-ia} \\ -ie^{ia} & ie^{-ia} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) & -\left(e^{-ia} - e^{-ia}\right) \\ e^{-ia} - e^{-ia} & i\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Exercice n$^o$ 5**

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

**(3) $\Rightarrow$ (2).** On sait que si la série de terme général $A^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$.

**(2) $\Rightarrow$ (1).** Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel $n$, $A^nX = \lambda^nX$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty} A^nX = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^nX = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$ (car $X \neq 0$).
Ainsi, si $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$ alors $\text{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$.

**(1) $\Rightarrow$ (3).** Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$. « On admet qu'il existe deux matrices $D$ et $N$ telles que $A = D+N$, $D$ est diagonalisable, $N$ est nilpotente et $DN = ND$. De plus, $D$ et $A$ ont même spectre.

On note $k \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de $N$. Puisque les matrices $D$ et $N$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire pour $n \geqslant k$

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j.$$

Il existe une matrice $P \in GL_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $\Delta$ tel que $D = P\Delta P^{-1}$. Mais alors, $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall n \geqslant j$,

$$\binom{n}{j} D^{n-j}N^j = P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times P^{-1}N^j.$$

Soit $j \in [\![0,k]\!]$. Vérifions tout d'abord que la série de terme général $\dbinom{n}{j}\Delta^{n-j}$, $n \geqslant j$ converge. Posons $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Alors $\forall n \geqslant j$, $\dbinom{n}{j}\Delta^{n-j} = \text{diag}\left(\dbinom{n}{j}\lambda_1^{n-j}, \ldots, \dbinom{n}{j}\lambda_p^{n-j}\right)$. Maintenant, si $\lambda$ est une valeur propre de $\Delta$ (et donc de $A$), $\dbinom{n}{j}\lambda^{n-j} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!}\lambda^{n-j} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^j\lambda^{n-j}}{j!} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $|\lambda| < 1$ et donc la série de terme général $\dbinom{n}{j}\lambda^{n-j}$, $n \geqslant j$, converge.

Ainsi, la série de terme général $\dbinom{n}{j}\Delta^{n-j}$ converge. D'autre part, l'application $M \mapsto P \times M \times P^{-1}N^j$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général $P \times \dbinom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge.

Finalement, pour chaque $j \in [\![0,k]\!]$, la série de terme général $P \times \dbinom{n}{j}\Delta^{n-j} \times P^{-1}N^j$ converge et donc la série de terme général $A^n$ converge car est somme de $k+1$ séries convergentes.

**Exercice n° 6**

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4/3 & 5/6 \\ -5/3 & X+7/6 \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = \left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} D^k\right)P^{-1} = P\,\text{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)P^{-1}.$$

Puisque $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ sont dans $]-1,1[$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ convergent. Il en est de même de la série de terme général $D^k$. Maintenant, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général $A^k$ converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto PMP^{-1}\text{)} \\
&= P\,\text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)P^{-1} = P\,\text{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

**Exercice n° 7**

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout entier naturel $n$, on a $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$. Puisque $\|A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même de la série de terme général $\|A^n\|$ et donc la série de terme général $A^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. On en déduit que la série de terme général $A^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$\begin{aligned}
(I-A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I-A)\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left((I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto (I-A)M\text{)} \\
&= \lim_{n\to+\infty}(I-A^{n+1}) = I \;(\lim_{n\to+\infty} A^{n+1} = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $I - A$ est inversible à droite et donc inversible et de plus, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. On en déduit encore

$$\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| = \left\|\sum_{n=2}^{+\infty} A^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

**Exercice n° 8**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que d'une part $\det(\exp(A)) \neq 0$ et d'autre part $\exp(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right)$. Par continuité du déterminant, on a donc $\lim_{p\to+\infty}\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right) = \det(\exp(A)) \neq 0$. Par suite, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right) \neq 0$ et donc tel que $\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

**Exercice n° 9**

**1)** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & -2 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-3)(X^2-1) + (-2X-2) + (2X+2) = (X+1)(X-1)(X-3)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de $X^n$ par $\chi_A$ s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$ $(*)$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant en $A$, le théorème de Cayley-Hamilton fournit :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

En évaluant les deux membres de l'égalité $(*)$ en $-1$, $1$ et $3$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) \\ 8a_n + \frac{3}{2}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) = 3^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{8}\left(3^n - 2 + (-1)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{8}\left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right) \end{array}\right. .$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{8}\left(\left(3^n - 2 + (-1)^n\right)A^2 + 4\left(1-(-1)^n\right)A + \left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right)I_3\right).$$

Maintenant,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel $t$,

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\left(3^n - 2 + (-1)^n\right)A^2 + 4\left(1-(-1)^n\right)A + \left(-3^n + 6 + 3(-1)^n\right)I_3\right) \\ &= \frac{e^{3t} - 2e^t + e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{4(e^t - e^{-t})}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-e^{3t} + 6e^t + 3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t} - 8e^t & 8e^{3t} - 8e^t \\ 2e^{3t} - 2e^{-t} & 2e^{3t} + 6e^{-t} & 2e^{3t} - 2e^{-t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-t} & -2e^{3t} + 8e^t - 6e^{-t} & -2e^{3t} + 8e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.}$$

**2)** En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 \\ -6 & X-4 & -2 \\ 10 & 4 & X+2 \end{vmatrix} = (X-4)\left(X^2 - 2X\right) + 6(-X+2) + 10(X-2) = (X-2)[X(X-4) - 6 + 10] \\ &= (X-2)(X^2 - 4X + 4) = (X-2)^3. \end{aligned}$$

On est dans la situation où $A$ a une unique valeur propre. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(A - 2I_3)^3 = 0$ et donc pour tout réel $t$,

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(t(A-2I_3)+2tI_3) = \exp(t(A-2I_3))\times\exp(2tI_3) \text{ (car les matrices } t(A-2I_3) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)}\\
&= \left(I_3 + t(A-2I_3) + \frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right)\times e^{2t}I_3\\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix} + \frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix} + \frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t+1)e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA) = \begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t+1)e^{2t}\end{pmatrix}.}$$

**Exercice n° 10**

$$\chi_A = \begin{vmatrix}X&-1/2&2\\-1/2&X&0\\0&0&X+1/2\end{vmatrix} = \left(X^2-\frac{1}{4}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right) = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2\left(X-\frac{1}{2}\right).$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La division euclidienne de $X^n$ par $\chi_A$ s'écrit $X^n = Q_n\chi_A + a_nX^2 + b_nX + c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$. On évalue les deux membres de cette égalité en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ et on obtient $\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient $-a_n+b_n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Maintenant,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ -a_n+b_n = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{a_n}{2}+2c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ -a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ c_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A^2 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3$ avec $A^2 = \begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4&0&1\\0&1/4&-1\\0&0&1/4\end{pmatrix}$. On en déduit que pour $|t|<2$,

$$\begin{aligned}\ln(I_3+tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n\\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A\\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)I_3.\end{aligned}$$

 

et donc

$$\begin{aligned}
\ln(I_3+tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(t/2)^n}{n}\right)A^2\\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(t/2)^n}{n}\right)A\\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n - 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(t/2)^n}{n}\right)I_3\\
&= \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - 2\left(\frac{\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}}\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A^2 + \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A\\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + 2\left(\frac{\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}}\right) + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)I_3\\
&= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\right)\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1\\ 0 & 1/4 & -1\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix} + \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + \frac{2t}{2-t} + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t}\\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in]-2,2[,\ \ln(I_3+tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t}\\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.}$$

**Exercice n° 11**

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

$$\left\|\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} - \left(I+\frac{A}{p}\right)^p\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{p}{k}}{p^k}\right)A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p}\left|\frac{1}{k!} - \frac{\binom{p}{k}}{p^k}\right|\|A\|^k.$$

Maintenant, $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\dfrac{1}{k!} - \dfrac{\binom{p}{k}}{p^k} = \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{\overbrace{p\times(p-1)\times\ldots\times(p-k+1)}^{k}}{\underbrace{p\times p\times\ldots\times p}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{1}{k!} - \frac{\binom{p}{k}}{p^k}\right|\|A\|^k = \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{p}{k}}{p^k}\right)\|A\|^k = \sum_{k=0}^{p}\frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1+\frac{\|A\|^p}{p}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\to} e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} - \left(I+\frac{A}{p}\right)^p$ tend vers 0 quand $p$ tend vers $+\infty$ et puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}$ tend vers $\exp(A)$ quand $p$ tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(I+\dfrac{A}{p}\right)^p$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.}$$

**Exercice n° 12**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\chi_A$ est de degré $n$, la division euclidienne de $X^k$ par $\chi_A$ s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)}X^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)}X + a_0^{(k)} \text{ où } Q_k \in \mathbb{R}[\mathbb{C}] \text{ et } \left(a_0^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}\right) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors que $A^k = a_{n-1}^{(k)}A^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)}A + a_0^{(k)}I_n$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, \ldots, A, I_n)$ puis $\forall p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. Enfin, puisque $\mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, $\exp(A) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$