

# Planche n° 20. Normes matricielles. Suites et séries matricielles

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

## Exercice n° 1 (\*\*\*)

Déterminer  $s = \text{Sup} \left\{ \frac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\}$  quand  $\| \cdot \|$  est **1**)  $\| \cdot \|_1$ , **2**)  $\| \cdot \|_2$ , **3**)  $\| \cdot \|_\infty$ .

## Exercice n° 2 (\*\*)

Soit  $N$  une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $k > 0$  tel que  $kN$  soit une norme sous-multiplicative.

## Exercice n° 3 (\*)

Existe-t-il une norme  $N$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 2$ ) telle que  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ ,  $N(AB) = N(A)N(B)$ .

## Exercice n° 4 (\*\* I)

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$  ( $a$  réel strictement positif donné).

## Exercice n° 5 (\*\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ ,  $p \geq 1$ . Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\text{Sp}(A) \subset B_0(0, 1)$  (disque unité ouvert).
- (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$
- (3) La série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge.

Pour (1)  $\Rightarrow$  (3), on admettra que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe un unique couple de matrices  $(D, N)$  tel que :  $A = D + N$ ,  $D$  est diagonalisable,  $N$  est nilpotente et  $ND = DN$  (décomposition de DUNFORD). De plus,  $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(A)$ .

## Exercice n° 6 (\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$ . Convergence et somme de la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## Exercice n° 7 (\*\* I)

On munit  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  d'une norme sous-multiplicative notée  $\| \cdot \|$ . Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  tel que  $\|A\| < 1$ . Montrer que la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge puis que  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I - A)^{-1}$ .

En déduire que  $\|(I - A)^{-1} - (I + A)\| \leq \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|}$ .

## Exercice n° 8 (\*\* I)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \geq p_0$ ,  $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

## Exercice n° 9 (\*\* I)

Calculer  $\exp(tA)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , si **1**)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  **2**)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

## Exercice n° 10 (\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} A^n$  en précisant les valeurs de  $t$  pour lesquelles la série converge.

**Exercice n° 11 (\*\*\*)**

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , calculer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( I_n + \frac{A}{p} \right)^p$ .

**Exercice n° 12 (\*\*)**

Montrer que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\exp(A)$  est un polynôme en  $A$ .