Chapitre 20. Matrices (1ère partie)

Plan du chapitre

1 Opérations sur les matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1.1 Définition d'une matrice

On se donne deux entiers naturels non nuls n et p. La définition la plus propre d'une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est : « une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une application de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$ ou encore une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ ». Dans la pratique, une matrice est écrite sous une des formes suivantes (la notation avec des parenthèses étant de loin la plus utilisée) :

$$A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\dots&a_{1,j}&\dots&a_{1,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i,1}&\dots&a_{i,j}&\dots&a_{i,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\dots&a_{n,j}&\dots&a_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1,1}&\dots&a_{1,j}&\dots&a_{1,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i,1}&\dots&a_{i,j}&\dots&a_{i,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\dots&a_{n,j}&\dots&a_{n,p}\end{bmatrix}.$$

Nous adopterons donc la définition suivante :

Définition 1. Pour n et p entiers naturels non nuls donnés, une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes et donc à np cases, chaque case contenant un élément de $\mathbb{K}$. Dans ce cas, la matrice est de **format** (n,p). L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si de plus $n=p$, la matrice est dite **carrée**. Dans ce cas, n est le **format** ou la taille de la matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice à n lignes et 1 colonne s'appelle une **matrice colonne**. L'ensemble des matrices colonnes à n lignes se note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Une matrice à 1 ligne et p colonnes s'appelle une **matrice ligne**. L'ensemble des matrices lignes à p colonnes se note $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix}2&-1&4\\5&0&1\end{pmatrix}$ est une matrice à deux lignes et trois colonnes (une ligne se lit horizontalement et une colonne verticalement), $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format 2, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Un élément de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ est une matrice n'ayant qu'un seul coefficient ; $A=(a_{1,1})$. On a souvent l'habitude d'identifier une telle matrice et son unique coefficient : $(a_{1,1})=a_{1,1}$ ou encore $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})=\mathbb{K}$ de même que dans les chapitres précédents, on a identifié $\mathbb{K}^1$ et $\mathbb{K}$.

Si $A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\dots&a_{1,j}&\dots&a_{1,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i,1}&\dots&a_{i,j}&\dots&a_{i,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\dots&a_{n,j}&\dots&a_{n,p}\end{pmatrix}$, $a_{i,j}$ est le coefficient ligne i, colonne j, de A, $\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{i,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de A souvent notée C_j et $\begin{pmatrix}a_{i,1}&\dots&a_{i,j}&\dots&a_{i,p}\end{pmatrix}$ est la i-ème ligne de A souvent notée L_i.

Quand A est une matrice carrée, la **diagonale principale** de la matrice A est la diagonale formée par les coefficients $a_{i,i}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Elle démarre en haut à gauche et finit en bas à droite. Les coefficients de cette diagonale principale sont souvent appelés **coefficients diagonaux**.

1.2 Les opérations + et .

1.2.1 Définition des opérations + et .

• Pour tout $(A,B)=\left((a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]},(b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\right)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, on pose

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

• Pour tout $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on pose

$$\lambda.A=(\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

(Par commodité d'écriture nous n'écrirons plus le . entre les nombres et les matrices par la suite.)

Ainsi, par exemple, $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 1-1 & 2\times 2-(-1) & 2\times 0-2\\ 2\times(-1)-2 & 2\times 0-(-1) & 2\times 3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que :

Théorème 1. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe commutatif.

L'élément neutre pour l'addition est la **matrice nulle** notée 0 ou $0_{n,p}$. C'est la matrice rectangulaire de format (n,p) dont tous les coefficients sont nuls.
L'**opposé** d'une matrice $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![\times[\![1,p]\!]}$ est la matrice $-A=(-a_{i,j})_{(i,j)\in[\![\times[\![1,p]\!]}$.

De même, il est clair que :

Théorème 2.

1) $\forall (A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
2) $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.
3) $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda(\mu A)=\lambda\mu A$.
4) $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $1.A=A$ et $0.A=0_{n,p}$.
5) $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $(-\lambda)A=\lambda(-A)=-\lambda A$.

1.2.2 Les matrices élémentaires

Si $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les règles de calculs définies au paragraphe précédent permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les quatre matrices $E_{1,1}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{2,1}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_{1,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $E_{2,2}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sont les quatre matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A l'aide de ces matrices, la matrice $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ peut s'écrire sous la forme :

$$A=aE_{1,1}+bE_{2,1}+cE_{1,2}+dE_{2,2}.$$

Plus généralement, soient n et p deux entiers naturels non nuls. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice rectangulaire de format (n,p) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i, colonne j, qui est égal à 1. Les $n\times p$ matrices $E_{i,j}$ sont les **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dans le but de donner une écriture synthétique des matrices élémentaires, on définit un nouveau symbole : le **symbole de Kronecker** qui s'écrit $\delta_{i,j}$. Si i et j sont deux entiers donnés, $\delta_{i,j}$ est égal à 1 quand $i=j$ et à 0 sinon :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \delta_{i,j}=\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{array}\right. .$$

Pour $(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, le coefficient ligne k, colonne l de la matrice $E_{i,j}$, est égal à 1 si et seulement si $k=i$ et $l=j$ et est égal à 0 sinon. Le coefficient ligne k, colonne l, est donc égal à $\delta_{k,i}\times\delta_{l,j}$. Ainsi,

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ E_{i,j}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 & & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots\\ & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \dots & & 0 & & \dots & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

ou aussi

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ E_{i,j} = (\delta_{k,i} \times \delta_{l,j})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une matrice donnée, alors

$$A = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j}.$$

On dit alors que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **combinaison linéaire** des matrices élémentaires $E_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. D'autre part, cette écriture est unique ou encore on peut identifier les coefficients

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_{i,j}E_{i,j} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Théorème 3. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire, de manière unique, des matrices élémentaires $E_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\forall A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j},$$

et

$$\forall (A,B) = \left((a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}, (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\right) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2,$$

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_{i,j}E_{i,j} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

L'égalité $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j}$ est fréquemment utilisée. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{1,3} - E_{2,1} + E_{2,2}.$$

1.3 Produit de deux matrices

1.3.1 Définition du produit matriciel

On définit maintenant le produit de deux matrices. Pour des raisons qui apparaitront ultérieurement, on ne multipliera pas tout type de matrice par tout type de matrice. On ne définira le produit $A \times B$ uniquement dans le cas où **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**. Plus précisément, si n, p et q sont trois entiers naturels non nuls et si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice $A \times B$ est la matrice de format (n,q) dont le coefficient ligne i, colonne j, où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$. Ainsi,

$$\forall \left((a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}, (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}.$$

On note que dans le cas général, $\times$ n'est pas une loi interne car les matrices que l'on multiplie n'appartiennent pas au même ensemble.

Ainsi, par exemple, le coefficient ligne 1 colonne 2, de la matrice AB est $a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + \ldots + a_{1,p}b_{p,2}$. On dit que l'on a effectué le **produit scalaire usuel** du p-uplet $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,p})$ (constitué des coefficients de la ligne 1) par le p-uplet $(b_{1,2}, b_{2,2}, b_{3,2} \ldots, b_{p,2})$ (constitué des coefficients de la colonne 2). Plus généralement, pour obtenir le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $A \times B$, on effectue le produit de la ligne i par la colonne j : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, la matrice A est de format $(2,3)$ et la matrice B est de format $(3,3)$. Donc, la matrice $A \times B$ est définie et de format $(2,3)$. De plus, son coefficient ligne 2, colonne 1, est obtenu de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1\times 3+3\times(-5)+2\times 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -8 & \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

et plus généralement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -17 & 2 \\ -8 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

❏

On donne maintenant les premières règles de calcul avec des produits de matrices.

Théorème 4. Soient n, p, q, r quatre entiers naturels non nuls.

$\forall(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC)$.

Démonstration . On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]}$.

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Donc le produit $A\times B$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Ensuite, $A\times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Donc, le produit $(AB)\times C$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. De même, le produit $A\times(BC)$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Pour $(i,k) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, le coefficient ligne i, colonne k, de la matrice $A\times B$ est $\displaystyle\sum_{l=1}^{p} a_{i,l}b_{l,k}$ et donc, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $(A\times B)\times C$ est

$$\sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{p} a_{i,l}b_{l,k}\right)c_{k,j} = \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant p\\ 1\leqslant k\leqslant q}} a_{i,l}b_{l,k}c_{k,j} = \sum_{\substack{1\leqslant k'\leqslant p\\ 1\leqslant l'\leqslant q}} a_{i,k'}b_{k',l'}c_{l',j}.$$

De même, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $A\times(B\times C)$ est

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{k,l}c_{l,j}\right) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant l\leqslant q}} a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j}.$$

Les matrices $(A\times B)\times C$ et $A\times(B\times C)$ ont les mêmes coefficients. Ces matrices sont donc égales.

❏

On note I_n la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, vaut 1 si $i=j$ et 0 sinon. Donc,

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 5. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n\times A = A$ et $A\times I_p = A$.

Démonstration . On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

$I_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Donc, le produit $I_n\times A$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $I_n\times A$ est

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}a_{k,j} = a_{i,j} \text{ (terme obtenu pour } k=i, \text{ les autres termes étant nuls)}.$$

Donc, $I_n\times A = A$. De même, $A\times I_p = A$.

❏

Théorème 6. $\forall(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A\times(B+C) = AB+AC$ et $\forall(B,C,A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(B+C)\times A = BA+CA$.

Démonstration . On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$.

A est dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B, C et $B+C$ sont dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Donc, les produit $A\times B$, $A\times C$ et $A\times(B+C)$ sont définis et sont éléments de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de $A\times B$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$ et le coefficient ligne i, colonne j, de $A\times C$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j}$ puis le coefficient ligne i, colonne j, de $A\times B + A\times C$ est

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j} = \sum_{k=1}^{p}\left(a_{i,k}b_{k,j} + a_{i,k}c_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\left(b_{k,j}+c_{k,j}\right),$$

qui est le coefficient ligne i, colonne j, de $A\times(B+C)$. Donc, $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$.

L'autre égalité se démontre de la même manière.

❏

Théorème 7. $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(\lambda A)\times B = A\times(\lambda B) = \lambda AB$.

Démonstration . Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $(\lambda A)\times B$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{i,k})\,b_{k,j} = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et celui de la matrice $A\times(\lambda B)$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,(\lambda b_{k,j}) = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$. Dans les deux cas, on a trouvé le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice λAB

❏

Exercice 1. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

1) Calculer $M(\theta)\times M(\theta')$ pour tout $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $(M(\theta))^n$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (où $(M(\theta))^n = \overbrace{M(\theta)\times\ldots\times M(\theta)}^{n\text{ facteurs}}$).

Solution 1.

1) Soit $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
M(\theta)\times M(\theta') &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta') & -\sin(\theta')\\ \sin(\theta') & \cos(\theta')\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\cos(\theta')-\cos(\theta)\sin(\theta')\\ \sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}\\
&= M(\theta+\theta').
\end{aligned}$$

2) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

- L'égalité est vraie pour $n=1$.
- Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $(M(\theta))^n = M(n\theta)$. Alors,

$$\begin{aligned}
(M(\theta))^{n+1} &= (M(\theta))^n\times M(\theta)\\
&= M(n\theta)\times M(\theta)\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= M(n\theta+\theta)\ \text{(d'après 1))}\\
&= M((n+1)\theta).
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

1.3.2 Produit de deux matrices élémentaires

Théorème 8. $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

Démonstration. Soit $(u,v) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$. Le coefficient ligne u, colonne v, de $E_{i,j} \times E_{k,l}$ est

$$\begin{aligned}\sum_{w=1}^{p} \underbrace{(\delta_{u,i} \quad \delta_{w,j})}_{\substack{\text{coef. ligne } u, \\ \text{colonne } w, \\ \text{de } E_{i,j}}} \ \underbrace{(\delta_{w,k} \quad \delta_{v,l})}_{\substack{\text{coef. ligne } w, \\ \text{colonne } v, \\ \text{de } E_{k,l}}} &= \delta_{u,i}\delta_{v,l} \sum_{w=1}^{n} \delta_{w,j}\delta_{w,k} \\ &= \delta_{j,k}\delta_{u,i}\delta_{v,l} \text{ (obtenu pour } w = j).\end{aligned}$$

Ce coefficient est aussi celui de $\delta_{j,k} E_{i,l}$ ce qui démontre le résultat.

❑

Ainsi, dans le cas de matrices carrées de format $n \geqslant 2$, $E_{1,2} \times E_{2,1} = E_{1,1}$ et $E_{2,1} \times E_{1,2} = E_{2,2}$. En particulier, $E_{1,2} \times E_{2,1} \neq E_{2,1} \times E_{1,2}$. On note aussi que $E_{1,2} \times E_{1,1} = 0$ et pourtant $E_{2,1} \neq 0$ et $E_{1,1} \neq 0$.

Exercice 2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 et N^3.

Solution 2. $N = E_{1,2} + E_{2,3}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} N^2 &= (E_{1,2} + E_{2,3})(E_{1,2} + E_{2,3}) = E_{1,2}E_{1,2} + E_{1,2}E_{2,3} + E_{2,3}E_{1,2} + E_{2,3}E_{2,3} = E_{1,3} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} N^3 &= N \times N^2 = (E_{1,2} + E_{2,3}) E_{1,3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

⇨ **Commentaire**.

◇ *Quand des matrices contiennent beaucoup de* 0, *on utilise fréquemment l'écriture de cette matrice à l'aide des matrices élémentaires pour effectuer des produits.*

◇ *La matrice* N *de l'exercice 2 vérifie* $N \neq 0$, $N^2 \neq 0$ *et* $N^3 = 0$. *Une telle matrice est dite* ***nilpotente d'indice*** 3. *De manière générale, si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A *est* ***nilpotente*** *si et seulement si il existe un entier naturel non nul* k *tel que* $A^k = 0$. *L'****indice de nilpotence*** *de* A *est alors* $p = Min\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0\right\}$. *Il existe une et une seule matrice nilpotente d'indice 1 à savoir la matrice nulle* 0.

1.3.3 L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Le produit de deux matrices carrées de format n est défini et est une matrice carrée de format n. Donc, $\times$ est une loi interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les théorèmes 1, 4, 5 et 6, ainsi que les calculs précédant l'exercice 2, fournissent immédiatement

Théorème 9. Pour tout $n \geqslant 1$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Cet anneau est non commutatif pour $n \geqslant 2$.

On note que l'élément neutre de $\times$ est I_n. D'autre part, comme dans tout anneau, l'élément neutre pour $+$, à savoir la matrice nulle 0_n, est absorbant pour la multiplication : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$.

Comme dans tout anneau, on peut définir les exposants : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ et on adopte la convention $A^0 = I_n$ (convention douteuse faisant parfois commettre quelques erreurs, la notation A^0 n'étant réellement cohérente que quand A est inversible pour $\times$).

On a alors les règles de calculs usuelles sur les exposants :

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $A^p \times A^q = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = A^{pq}$.
- $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\forall p \in \mathbb{N}$, **si** A **et** B **commutent**, alors $(AB)^p = A^pB^p$.

Comme dans tout anneau, on a aussi la formule du binôme de Newton et l'identité $A^p - B^p = \ldots$:

Théorème 10. Soit $n \geqslant 1$.

• (formule du binôme de Newton) $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, **si** A **et** B **commutent**

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{p} A^k B^{p-k}.$$

• $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, **si** A **et** B **commutent**

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}.$$

Si A et B ne commutent pas, on a par exemple $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ et pas mieux.

Il est donc temps de s'intéresser aux matrices carrées qui commutent avec toutes les matrices carrées :

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$.

Solution 3. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Si A est solution du problème, alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Or,

$$\begin{aligned}
AE_{i,j} &= \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} \\
&= a_{1,i}E_{1,j} + a_{2,i}E_{2,j} + \ldots + a_{i,i}E_{i,j} + \ldots + a_{n,i}E_{n,j} \\
&= \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & a_{1,i} & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & & 0 & a_{i,i} & 0 & & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_{n,i} & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} &
\end{array}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E_{i,j}A &= \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l} \\
&= a_{j,1}E_{i,1} + a_{j,2}E_{i,2} + \ldots + a_{j,j}E_{i,j} + \ldots + a_{j,n}E_{i,n} \\
&= \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \ldots & & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & \ldots & & \ldots & 0 \\
a_{j,1} & \ldots & a_{j,j} & \ldots & a_{j,n} \\
0 & \ldots & & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & \ldots & & \ldots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} &
\end{array}
\end{aligned}$$

On note que $AE_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf (peut-être) la j-ème qui est la i-ème colonne de A et que $E_{i,j}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf (peut-être) la i-ème qui est la j-ème de A.

On peut identifier les coefficients et on obtient en faisant varier i et j : pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq k$, $a_{i,k} = 0$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Ainsi, si A commutent avec toutes les matrices, alors A est nécessairement de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \times (\lambda I_n) = \lambda B = (\lambda I_n) \times B$.

Les matrices qui commutent avec toutes les matrices carrées sont les matrices de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 4.

1) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4.

1) $N^0 = I_3$ et $N^1 = N$. On a vu dans l'exercice n° 2 que $N^2 = E_{1,3}$ puis $N^3 = 0$. On en déduit que pour $k \geqslant 3$ (de sorte que $k - 3 \geqslant 0$), $N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0 = 0$.

2) $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$. Soit $n \geqslant 2$. $A = 2I_3 - N$ et puisque les matrices $2I_3$ et $-N$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}
A^n = (2I_3 - N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} (-N)^k \\
&= \binom{n}{0} (2I_3)^n (-N)^0 + \binom{n}{1} (2I_3)^{n-1} (-N)^1 + \binom{n}{2} (2I_3)^{n-2} (-N)^2 \ \text{(car pour } k \geqslant 3,\ N^k = 0) \\
&= 2^n I_3 - n2^{n-1} N + n(n-1)2^{n-3} N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$ ou $n = 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

⇨ **Commentaire** . *Quand on écrit* $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} (-N)^k$*, on remplace le problème du calcul des puissances successives de* A *par le calcul des puissances successives de la matrice* $2I_3$ *et de la matrice* $-N$*. Si l'on n'était pas capable de calculer ces puissances, utiliser le binôme ne présente plus aucun intérêt. Cette mentalité est la même dans l'exercice suivant.*

Exercice 5.

1) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2. En déduire J^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 5.

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$. Montrons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1} J$.

- $3^{1-1}J = J = J^1$ et donc, la formule est vraie quand $k = 1$.
- Soit $k \geqslant 1$. Si $J^k = 3^{k-1}J$, alors

$$J^{k+1} = J^k \times J = 3^{k-1}J \times J = 3^{k-1} \times 3J = 3^{(k+1)-1}J.$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$. D'autre part, $J^0 = I_3$ (et en particulier $J^0 \neq 3^{0-1}J$).

2) $A^0 = I_3$. Soit $n \geqslant 1$. Puisque $A = I_3 + J$ et que les matrices I_3 et J commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3 + J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k \\
&= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right) J \\
&= I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k\right) J = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} - \binom{n}{0} 3^0 1^n\right) J \\
&= I_3 + \frac{1}{3}\left((3+1)^n - 1\right) J = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{4^n - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Matrices carrées inversibles. Le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$

On rappelle qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible pour $\times$ si et seulement si il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$. Dans ce cas, la matrice B est unique et se note A^{-1}. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles pour $\times$. $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ et à ce titre :

Théorème 11. Soit $n \geqslant 1$. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

En particulier, $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$, si $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ (et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$) et si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ (et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$).

Théorème 12. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall (B, C)\, (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $AB = AC \Rightarrow B = C$.
$\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall (B, C)\, (\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}))^2$, $BA = CA \Rightarrow B = C$.

Démonstration. Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(B, C)\, (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow I_nB = I_nC \Rightarrow B = C.$$

Et de même pour l'autre implication.

❏

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on peut définir A^p pour $p \in \mathbb{Z}$: $\forall p \in \mathbb{Z}$, $A^p = \begin{cases} \overbrace{A \times \ldots \times A}^{p \text{ facteurs}} \text{ si } p \geqslant 1 \\ I_n \text{ si } p = 0 \\ \underbrace{A^{-1} \times \ldots \times A^{-1}}_{-p \text{ facteurs}} \text{ si } p \leqslant -1 \end{cases}$. Avec cette définition, on a les règles de calcul usuelles sur les exposants :

- $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $A^p \times A^q = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = A^{pq}$.
- $\forall (A,B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, si A et B commutent, $(AB)^p = A^p B^p$.

Au fur et à mesure du cours, plus loin dans ce chapitre, au second semestre ou en math spé, nous découvrirons de nombreuses méthodes, à utiliser en fonction des circonstances, pour montrer qu'une certaine matrice carrée est inversible et déterminer son inverse. La première méthode est fournie dès maintenant par la définition de l'inversibilité et de l'inverse :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ A \times B = I_n \text{ et } B \times A = I_n.$$

Cette méthode est mise en œuvre dans les deux exercices qui suivent.

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer A en fonction de I_3 et N.

2) Calculer N^3.

3) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et préciser A^{-1}.

Solution 6.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 - N$.

2) On a vu dans l'exercice 2, page 7, que $N^3 = 0$.

3) Puisque les matrices I_3 et N commutent, $(I_3 - N)\left(I_3 + N + N^2\right) = I_3^3 - N^3 = I_3$ et de même, $\left(I_3 + N + N^2\right)(I_3 - N) = I_3^3 - N^3 = I_3$. Donc, A est inversible et $A^{-1} = I_3 + N + N^2$. Plus précisément,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer A en fonction de I_3 et J.

2) Calculer J^2. En déduire une égalité du type $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = 0_3$ où α, β et γ sont trois réels, α étant non nul.

3) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et préciser A^{-1}.

Solution 7.

1) $A = I_3 + J$.

2) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J$, puis

$$J^2 = 3J \Rightarrow (A - I_3)^2 = 3(A - I_3) \Rightarrow A^2 - 5A + 4I_3 = 0.$$

3) $A^2 - 5A + 4I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \dfrac{1}{4}\left(-A^2 + 5A\right)$. Donc,

$$A \times \frac{1}{4}(-A + 5I_3) = I_3 = \frac{1}{4}(-A + 5I_3) \times A.$$

Par suite, $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(-A + 5I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nous donnons maintenant une bonne fois pour toutes une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice carrée à deux lignes et deux colonnes puis son inverse en cas d'inversibilité.

Théorème 13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Le **déterminant** de A est $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

$A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. De plus, dans le cas où $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Le résultat « $A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ » se généralisera aux matrices carrées de format $n \geqslant 1$ dans le chapitre « Déterminants » traité au second semestre. Nous nous contentons ici d'une vérification du résultat.

Démonstration .

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$ et de même $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$.

Si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2$.

On a montré que si $ad - bc \neq 0$, A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Si $ad - bc = 0$, alors $A \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = 0_2$. Si A est inversible, A est simplifiable pour $\times$ et il reste $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = 0_2$. Ceci fournit $a = b = c = d = 0$ puis $A = 0_2$. Mais la matrice nulle n'est pas inversible pour $\times$ car pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $0_2 \times B = 0_2 \neq I_2$.
Il était donc absurde de supposer A inversible.
On a montré que si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.

❏

Ainsi, par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (car $\det(A) = 2 \neq 0$) et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\det(B) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$.

1.3.5 Les pièges de la multiplication des matrices

La multiplication des matrices a quelques comportements qui peuvent surprendre et se révéler piégeux au sortir du lycée. Rappelons d'abord quelques exemples de calcul. On suppose que $n \geqslant 2$. On pose $A = E_{1,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = E_{2,2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$A^2 = 0_n,\ B^2 = B,\ AB = E_{1,2} \text{ et } BA = 0_2.$$

Donc,

- Il est possible que $A \times B \neq B \times A$ (on rappelle que les matrices carrées commutant avec toute matrice carrée sont les matrices de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbb{K}$).
- Il est possible que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A \times B = 0$ ou encore un produit de facteurs peut être nul sans qu'aucun de ses facteurs ne soit nul.
- Il est possible que $A \times B = 0$ et $B \times A \neq 0$.
- Il est possible que $A \times B = A \times C$ et $B \neq C$ (on rappelle que les matrices A simplifiables sont les matrices inversibles).
- Il est possible que $(A \times B)^2 \neq A^2 \times B^2$. Par exemple, $(E_{1,2}E_{2,1})^2 = (E_{1,1})^2 = E_{1,1}$ mais $E_{1,2}^2 E_{2,1}^2 = 0$.
- Il est possible que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
Par exemple, $(E_{1,2} + E_{2,1})^2 = (E_{1,2} + E_{2,1})(E_{1,2} + E_{2,1}) = E_{1,2}^2 + E_{1,2}E_{2,1} + E_{2,1}E_{1,2} + E_{2,1}^2 = E_{1,1} + E_{2,2}$ mais $E_{1,2}^2 + 2E_{1,2}E_{2,1} + E_{2,1}^2 = 2E_{1,1}$.
- Il est possible que $A^2 = A$ bien que $A \neq 0_N$ et $A \neq I_n$ (étant entendu que $0_n^2 = 0_n$ et $I_n^2 = I_n$) ou encore l'équation du second degré $M^2 = M$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, a strictement plus que deux solutions (les matrices M vérifiant $M^2 = M$ sont dites idempotentes).
- Il est possible que $A^2 = 0_n$ bien que $A \neq 0_N$ (de telles matrices sont dites nilpotentes d'indice 2).

1.4 Transposée d'une matrice

DÉFINITION 2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La **transposée** de la matrice A, notée A^T ou ${}^tA$, est la matrice élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient ligne i, colonne j, $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, est le coefficient de la matrice A situé ligne j, colonne i ou encore

$$A^T = \left(a'_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \text{ où } \forall(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Les propriétés usuelles de calcul de la transposition sont :

Théorème 14.

1) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\left(A^T\right)^T = A$.

2) $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.

3) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

4) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^T \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$. De plus, en cas d'inversibilité, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

DÉMONSTRATION .

1) On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. A^T est la matrice de format (p,n) dont le coefficient ligne i, colonne j, $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, est $a'_{i,j} = a_{j,i}$. $\left(A^T\right)^T$ est la matrice de format (n,p) dont coefficient ligne i, colonne j, $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, est $a''_{i,j} = a'_{j,i} = a_{i,j}$. Donc, $\left(A^T\right)^T = A$.

2) On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $(\lambda A + \mu B)^T$ est $\lambda a_{j,i} + \mu b_{j,i}$ et est aussi le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $\lambda A^T + \mu B^T$. Donc, $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.

3) On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ puis $A^T = \left(a'_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$ et $B^T = \left(b'_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
• AB est un élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et donc $(AB)^T$ est un élément de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $(AB)^T$ est encore le coefficient ligne j, colonne i, de la matrice AB c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}.$$

• A^T est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et B^T est un élément de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Donc, $B^T A^T$ est défini et est un élément de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $B^T A^T$ est le « produit » de la ligne i de B^T par la colonne j de A^T c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{p} b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}.$$

Les deux matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$ ont donc les mêmes coefficients puis $(AB)^T = B^T A^T$.

4) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \times \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I_n^T = I_n$ et $\left(A^{-1}\right)^T \times A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I_n^T = I_n$. Donc, $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
En appliquant ce résultat à la matrice A^T, on obtient : si $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A = \left(A^T\right)^T \in GL_n(\mathbb{K})$.

❑

Exercice 8. Soient $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer $U^T V$ et UV^T.

Solution 8.

• U^T est une matrice de format $(1,n)$ et V est une matrice de format $(n,1)$. Donc, $U^T V$ est définie et de format $(1,1)$. $U^T V$ est le nombre :

$$U^T V = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n.$$

• U est une matrice de format $(n, 1)$ et V^T est une matrice de format $(1, n)$. Donc, UV^T est définie et de format (n, n). Si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j, est u_iv_j et donc

$$UV^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \dots & u_1v_j & \dots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_iv_1 & \dots & u_iv_j & \dots & u_iv_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \dots & u_nv_j & \dots & u_nv_n \end{pmatrix} = (u_iv_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

1.5 Quelques grands types de matrices

1.5.1 Matrices scalaires

Définition 3. Une **matrice scalaire** de format $n \in \mathbb{N}^*$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$.

⇨ **Commentaire** . *On a vu dans l'exercice 3, page 8, que les matrices carrées qui commutent avec toutes les matrices carrées sont exactement les matrices scalaires.*

1.5.2 Matrices diagonales

Définition 4. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est une **matrice diagonale** si et seulement si $\forall i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.

Une matrice diagonale est donc une matrice de la forme : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Une telle matrice se note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

L'ensemble des matrices diagonales se note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Les règles de calcul sur les matrices diagonales sont remarquablement simples :

Théorème 15.

1) $\forall \left((\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha \operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} + \beta \operatorname{diag}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \operatorname{diag}(\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

2) a) $\forall \left((\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \times \operatorname{diag}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \operatorname{diag}(\lambda_i\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

b) $\forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^k = \operatorname{diag}\left(\lambda_i^k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

3) a) $\forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, $\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0\right)$ et dans ce cas $\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

b) Pour $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^k = \operatorname{diag}\left(\lambda_i^k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Démonstration .

1) Immédiat.

2) a) $\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\text{diag}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i E_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j E_{j,j}\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i\mu_j E_{i,i}E_{j,j}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i E_{i,i}=\text{diag}(\lambda_i\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

b) Se déduit immédiatement du a) par récurrence sur k.

3) a) Si tous les λ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, sont non nuls, alors

$$\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}=\text{diag}\left(\lambda_i\times\frac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}=\text{diag}(1)_{1\leqslant i\leqslant n}=I_n$$

et de même, $\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}=I_n$. Dans ce cas, $\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^{-1}=\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Si l'un des λ_i est nul, soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0}=0$. Alors, pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la i_0-ème colonne de la matrice $A\times\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est nulle. En particulier, pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A\times\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\neq I_n$. Ceci montre que la matrice $\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n'est pas inversible.

b) Le résultat est acquis pour $k\geqslant 0$ et si $k<0$,

$$\left(\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^k=\left(\left(\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^{-1}\right)^{-k}\left(\text{diag}\left(\lambda_i^{-1}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^{-k}=\text{diag}\left(\left(\lambda_i^{-1}\right)^{-k}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}=\text{diag}\left(\lambda_i^k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

❏

1.5.3 Matrices triangulaires

Commençons par analyser différentes « régions » dans une matrice carrée. La diagonale principale est constituée des coefficients $a_{i,j}$ tels que $j=i$.
Un coefficient $a_{i,j}$ situé strictement au-dessous cette diagonale a un numéro de colonne j strictement inférieur au numéro de ligne i et un coefficient $a_{i,j}$ situé strictement au-dessus cette diagonale a un numéro de colonne j strictement supérieur au numéro de ligne i. On peut résumer ceci avec le graphique :

$$\begin{pmatrix}\ddots & & & & \\ & \ddots & & j>i & \\ & & i=j & & \\ & j<i & & \ddots & \\ & & & & \ddots\end{pmatrix}.$$

On peut maintenant donner la définition d'une matrice triangulaire :

Définition 5. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est une matrice **triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire inférieure**) si et seulement si $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(i>j\Rightarrow a_{i,j}=0)$ (resp. $(i<j\Rightarrow a_{i,j}=0)$).

Une matrice triangulaire supérieure est donc une matrice de la forme : $T=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n}\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$ et une matrice triangulaire inférieure est une matrice de la forme : $T=\begin{pmatrix}a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) se note $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$).

⇨ **Commentaire** .

◇ *On note que* $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})\cap\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})=\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

◇ *On note aussi que la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure et que la transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.*

◇ *Il est clair qu'une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Exercice 9. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Solution 9. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices triangulaires supérieures. Donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AB est

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Dans cette somme, si $k > j$, alors $b_{k,j} = 0$ puis $a_{i,k} b_{k,j} = 0$ et si $k \leqslant j$, alors $i > j \geqslant k$ et en particulier $i > k$ de sorte que $a_{i,k} = 0$ puis $a_{i,k} b_{k,j} = 0$. Finalement, tous les termes de la somme sont nuls puis la somme est nulle.

En résumé, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$. Ceci montre que la matrice AB est triangulaire supérieure.

1.5.4 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

DÉFINITION 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est une matrice **symétrique** $\Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

A est une matrice **anti-symétrique** $\Leftrightarrow A^T = -A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = -a_{i,j}$.

L'ensemble des matrices symétriques se note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices anti-symétriques se note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Les matrices diagonales sont des matrices symétriques particulières.*

◇ *Les coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont obligatoirement nuls (car la définition d'une matrice anti-symétrique impose en particulier :* $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = -a_{i,i}$*).*

◇ *Il existe une et une seule matrice qui soit à la fois symétrique et anti-symétrique, à savoir la matrice nulle car* $A = A^T = -A$ *entraine* $2A = 0_n$ *puis* $A = 0_n$ *et réciproquement,* $0_n^T = 0_n$ *et* $0_n^T = -0_n$.

Théorème 16.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et un seul tel que $M = S + A$. Plus explicitement,

$$M = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$$

où $S = \dfrac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ est symétrique et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - M^T\right)$ est anti-symétrique.

DÉMONSTRATION . **Unicité.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si S et A existent, on a nécessairement $S + A = M$ (I) puis en transposant $S - A = M^T$ (II) (en tenant compte de $(S+A)^T = S^T + A^T$). En additionnant ou en retranchant membre à membre les égalités (I) et (I), on a donc nécessairement $2S = M + M^T$ et $2A = M - M^T$ puis

$$S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) \text{ et } A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right).$$

Ceci montre l'unicité du couple (S, A).

Existence. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $S = \dfrac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - M^T\right)$. Alors

- $S + A = \dfrac{1}{2}\left(M + M^T\right) + \dfrac{1}{2}\left(M - M^T\right) = M$.
- $S^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S$ et donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- $A^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A$ et donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Les matrices S et A conviennent. Ceci montre l'existence du couple (S, A).

❏

2 Calculs par blocs

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on élève cette matrice au carré, on effectue 16 calculs ce qui donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il était beaucoup plus judicieux de repérer des blocs simples dans cette matrice : $A = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$. Si on élève au carré la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice carrée de format 2, cela ne nécessite que quatre calculs :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

On doit alors ce rendre compte que le calcul de A^2 est le même que le calcul de A'^2 en remplaçant les nombres 0, -1, 1 mais les matrices 0_2, $-I_2$, I_2 qui sont des matrices carrées de format 2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4.$$

En effet, par exemple, le coefficient ligne 1, colonne 1 de A^2 est

$$(a_{1,1}a_{1,1} + a_{1,2}a_{2,1}) + (a_{1,3}a_{3,1} + a_{1,4}a_{4,1}) = \underbrace{0\times 0 + 0\times 0}_{\text{coef. ligne1, colonne 1 de } 0_2\times 0_2} + \underbrace{(-1)\times 1 + 0\times 0}_{\text{coef. ligne1, colonne 1 de } -I_2\times I_2} = -1.$$

De manière générale, une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pourra être décrite par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$ ou encore plus généralement

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} & \dots & A_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,j} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$$

où les blocs les $A_{i,j}$ sont des matrices de format (n_i, p_j) où $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_l$ sont des entiers naturels non nuls tels que $n_1 + \dots + n_k = n$ et $p_1 + \dots + p_l = p$.

Il s'agit maintenant d'apprendre à calculer par blocs.

• Il est immédiat que si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} & \dots & A_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,j} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,j} & \dots & B_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i,1} & \dots & B_{i,j} & \dots & B_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{k,1} & \dots & B_{k,j} & \dots & B_{k,l} \end{pmatrix}$ où pour tout (i, j), $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de format (n_i, p_j), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,j} + \mu B_{1,j} & \dots & \lambda A_{1,l} + \mu B_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{i,1} + \mu B_{i,1} & \dots & \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j} & \dots & \lambda A_{i,l} + \mu B_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{k,1} + \mu B_{k,1} & \dots & \lambda A_{k,j} + \mu B_{k,j} & \dots & \lambda A_{k,l} + \mu B_{k,l} \end{pmatrix}.$$

• Le produit de deux matrices définies par blocs n'est pas plus compliqué. Il y a juste quelques précautions à prendre. On se donne deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de sorte que le produit AB est défini. Commençons par découper A et B en quatre blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$. Si on a envie que les produits $A_{1,1}B_{1,1}$ ou $A_{1,1}B_{1,2}$

ou ... soient définis, il s'agit à chaque fois que le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ soit égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$. On impose donc au découpage de A en colonnes d'être identique au découpage de B en lignes :

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1[\\ n_2[\end{array} \!\!\begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{A_{1,1}}}^{p_1} & \overbrace{\phantom{A_{1,2}}}^{p_2} \\ \left(\begin{array}{c} A_{1,1} \\ A_{2,1} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} A_{1,2} \\ A_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \text{ et } B = \begin{array}{c} \\ p_1[\\ p_2[\end{array} \!\!\begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{B_{1,1}}}^{q_1} & \overbrace{\phantom{B_{1,2}}}^{q_2} \\ \left(\begin{array}{c} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} B_{1,2} \\ B_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions-le en analysant par exemple le bloc en haut à gauche. $A_{1,1}B_{1,1}$ est défini et de format (n_1, q_1) de même que $A_{1,2}B_{2,1}$. Donc, $A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}$ est défini et de format (n_1, q_1). On pose alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, $A_{1,1} = (\alpha_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_1 \\ 1\leqslant j\leqslant p_1}}$, $A_{1,2} = (\alpha'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_1 \\ 1\leqslant j\leqslant p_2}}$, $B_{1,1} = (\beta_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p_1 \\ 1\leqslant j\leqslant q_1}}$ et $B_{2,1} = (\beta'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p_2 \\ 1\leqslant j\leqslant q_1}}$.
Soit $(i,j) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, q_1]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AB est

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} &= \sum_{k=1}^{p_1} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=p_1+1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} + \sum_{k=p_1+1}^{p} \alpha'_{i,k-p_1}\beta'_{k-p_1,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} + \sum_{l=1}^{p_2} \alpha'_{i,l}\beta'_{l,j} \end{aligned}$$

qui est bien le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}$.

Plus généralement, si on découpe la matrice A en blocs $A_{i,k}$ et la matrice B en blocs $B_{k,j}$, de sorte que le découpage en colonne de A soit le même que le découpage en ligne de B ($n = n_1 + \ldots + n_s$, $p = p_1 + \ldots + p_t$, $q = q_1 + \ldots + q_u$), alors on peut effectuer le calcul de AB par blocs, le bloc n° (i,j) étant $\displaystyle\sum_{k=1}^{t} A_{i,k}B_{k,j}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} S & 0_2 \\ 0_2 & D \end{pmatrix},$$

où $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 2)$. On a $S^2\,(E_{1,2} + E_{2,1})\,(E_{1,2} + E_{2,1}) = E_{1,1} + E_{2,2} = I_2$. On peut alors calculer A^2 et plus généralement les puissances de A par blocs :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = \left(A^2\right)^p = \begin{pmatrix} I_2^p & 0 \\ 0 & D^{2p} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(1,1,1,2^p\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$ et

$A^{2p+1} = A^{2p}A = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & D^{2p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0_2 \\ 0_2 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D^{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{pmatrix}$.

En terme de calcul, tout s'est passé comme si les matrices S, D et 0_2 étaient des nombres alors que ce sont des matrices carrées de format 2. ❏

3 Transformations élémentaires

3.1 Définition et codage des transformations élémentaires

On va maintenant définir un certain nombre de transformations élémentaires et le codage correspondant sur les lignes ou les colonnes d'une matrice qui transforment une certaine matrice en une autre matrice qui a un lien avec la matrice initiale. Ce lien restera flou au début et s'éclaircira petit à petit, en particulier au second semestre une fois que les chapitres d'algèbre linéaire se seront déroulés. Ces transformations élémentaires seront utilisées plus loin dans ce chapitre pour inverser des matrices carrées de petits format par la méthode du pivot de Gauss.

Ces transformations élémentaires sont :

- Echange de deux colonnes. L'échange de la colonne i et de la colonne j $(i \neq j)$ se note $C_i \leftrightarrow C_j$.
  Echange de deux lignes. L'échange de la ligne i et de la ligne j $(i \neq j)$ se note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplier une colonne par un nombre $\lambda \neq 0$. Le remplacement de C_j par λC_j se note $C_j \leftarrow \lambda C_j$.
  Multiplier une ligne par un nombre $\lambda \neq 0$. Le remplacement de L_i par λL_i se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajouter une colonne à une autre. Le remplacement de la colonne j par la colonne j + la colonne i se note $C_j \leftarrow C_j + C_i$.
  Ajouter une ligne à une autre. Le remplacement de la ligne i par la ligne i plus la ligne j se note $L_i \leftarrow L_i + L_j$.

3.2 Interprétation en terme de calcul matriciel des transformations élémentaires

On va voir que chacune des transformations précédentes peut s'interpréter en terme de calcul matriciel. Commençons par un résultat utile pour la suite et à connaître en tant que tel. On calcule une bonne fois pour toutes le produit d'une matrice A par une matrice élémentaire $E_{i,j}$, à droite ou à gauche.

Théorème 17. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A.

- Soient $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$$AE_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Démonstration .

- Soit $A = (a_{k,l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{1 \leqslant k,l \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$$AE_{i,j} = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant p} a_{k,l}E_{k,l}\right)E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant p} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant p} a_{k,l}\delta_{l,i}E_{k,j}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} a_{k,i}E_{k,j} \text{ (parmi les } np \text{ termes, ceux pour lesquels } l \neq i \text{ sont nuls et ont été supprimés).}$$

Donc, $AE_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & \end{array} \end{array}$ ou encore $AE_{i,j}$ est la matrice définie en colonnes par

$$AE_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- Soit $A = (a_{k,l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$E_{i,j}A = E_{i,j}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p} a_{k,l}E_{k,l}\right) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant p} a_{k,l}\delta_{k,j}E_{i,l}$$
$$= \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Donc, $E_{i,j}A = \begin{array}{@{}c@{}l@{}} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & \dots & a_{j,p} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$ ou encore $E_{i,j}A$ est la matrice définie en lignes par

$$E_{i,j}A = \begin{array}{@{}c@{}l@{}} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Ainsi, $AE_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf peut-être la j-ème qui est sa i-ème colonne de A et $E_{i,j}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf peut-être la i-ème qui est sa j-ème ligne de A.

❏

Par exemple, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On se sert maintenant des résultats du théorème 16 pour interpréter en terme de calcul matriciel les trois transformations $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (ou $L_i \leftarrow \lambda L_i$), $C_j \leftarrow C_j + C_i$ (ou $L_i \leftarrow L_i + L_j$) et $C_i \leftrightarrow C_j$, (ou $L_i \leftrightarrow L_j$), dans une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Pour remplacer C_j par λC_j, il suffit d'ajouter $(\lambda - 1)C_j$ à C_j. D'après le théorème 17, ceci s'obtient en remplaçant la matrice A par la matrice $A + (\lambda - 1)AE_{j,j} = A\left(I_p + (\lambda - 1)E_{j,j}\right)$. On pose $\Delta_j(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{j,j}$. On a explicitement

$$\Delta_j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1),$$

où λ a été placé en j-ème colonne. En résumant les calculs précédents, on a

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_j & \dots & C_p \end{pmatrix}, \text{ alors } A\Delta_j(\lambda) = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & \lambda C_j & \dots & C_p \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \Delta_i(\lambda)A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -5 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -10 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On note que, de manière générale, si $\lambda \neq 0$, $\Delta_j(\lambda) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$ est une matrice carrée inversible en tant que matrice diagonale à coefficients diagonaux tous non nuls et de plus,

$$(\Delta_j(\lambda))^{-1} = (\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1))^{-1} = \mathrm{diag}\left(1, \ldots, 1, \frac{1}{\lambda}, 1, \ldots, 1\right) = D_j\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

• Pour remplacer C_j par $C_j + C_i$ ($i \neq j$), il suffit d'ajouter C_i à C_j. D'après le théorème 17, ceci s'obtient en remplaçant la matrice A par la matrice $A + AE_{i,j} = A(I_p + E_{i,j})$. On pose $\Lambda_{i,j} = I_p + E_{i,j}$. Explicitement,

$$\Lambda_{i,j} = I_p + E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le 1 non situé sur la diagonale, est situé ligne i, colonne j ($i \neq j$). Si est décrite en colonnes sous la forme $A = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j & \ldots & C_p \end{pmatrix}$, alors $AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & C_i & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ puis

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j & \ldots & C_p \end{pmatrix}, \text{ alors } A\Lambda_{i,j} = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j + C_i & \ldots & C_p \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \Lambda_{i,j}A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

On note que si $i \neq j$, $(I_p + E_{i,j})(I_p - E_{i,j}) = I_p + E_{i,j} - E_{i,j} + 0_p = I_p$ et de même, $(I_p - E_{i,j})(I_p + E_{i,j}) = I_p$. Donc, $\Lambda_{i,j}$ est inversible d'inverse $(\Lambda_{i,j})^{-1} = I_p - E_{i,j}$.

• Pour effectuer la transformation $C_i \Leftrightarrow C_j$, $i \neq j$, on part de la matrice $A = (C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_p)$, on supprime sa i-ème colonne et sa j-ème : $A - AE_{i,i} - AE_{j,j} = (C_1, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots, C_p)$ puis on place sa j-ème colonne (initiale) en i-ème position et sa i-ème colonne en j-ème position :

$$\text{si } A = (C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_p), \text{ alors } A(I_p - E_{i,j} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) = (C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_p).$$

Pour $i \neq j$, on pose $T_{i,j} = I_p - E_{i,j} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$. On a explicitement

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \ldots & & & & \ldots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & 0 & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ldots & & & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note que (en se rappelant que $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$) :

$$T_{i,j}^2 = (I_p - E_{i,j} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})(I_p - E_{i,j} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) = I_p$$

(écrivez explicitement tous les termes non nuls puis simplifiez). Donc, $T_{i,j}$ est inversible d'inverse elle-même.

On établit maintenant un résultat qui montre qu'on ne modifie pas le caractère inversible d'une matrice carrée en lui appliquant l'une des transformations précédentes.

Théorème 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M \in GL_n(K)$. Alors,

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow AM \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad .A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow MA \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Démonstration . Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M \in GL_n(K)$. Soit $A' = AM$.

On sait déjà que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A' \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A'^{-1} = M^{-1}A^{-1}$.

Réciproquement, supposons $A' \in GL_n(\mathbb{K})$. D'abord, $A' = AM \Rightarrow A'M^{-1} = AMM^{-1} \Rightarrow A = A'M^{-1}$. Puisque $M \in GL_n(\mathbb{K})$, on sait que $M^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et donc A est inversible en tant que produit de matrices inversibles.

Le raisonnement est analogue pour la matrice MA. On peut aussi appliquer le résultat obtenu pour la matrice AM à la transposée de cette matrice : $(AM)^T = M^TA^T$.

❏

On en déduit immédiatement :

Théorème 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit A' une matrice carrée obtenue à partir de la matrice A par transformations élémentaires successives sur les lignes ou les colonnes. Alors

$$A \text{ est inversible si et seulement si } A' \text{ est inversible.}$$

4 Systèmes d'équations linéaires

4.1 Les différentes présentations

4.1.1 Présentation classique

On se donne $n \times p$ nombres $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$, puis p nombres b_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère le système d'équations

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array} \right. ,$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. (S) est un système de p **équations linéaires à** n **inconnues** (les nombres x_1, ..., x_n). On peut aussi ne considérer qu'il n'y a qu'une inconnue, le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$.

Le système est dit **homogène** si et seulement si $b_1 = \ldots = b_p = 0$. Le système homogène associé au système (S) est

$$(S_h) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Résoudre le système (S), c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant (S). Jusqu'à la fin du chapitre, on notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_h$) l'ensemble des solutions su système (S) (resp. (S_h)).

Le système (S) est dit **compatible** si et seulement si $\mathcal{S} \neq \varnothing$. On note qu'un système homogène est toujours compatible car le n-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène.

4.1.2 Présentation matricielle d'un système

Soit $A \in (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. A est la **matrice du système** (S). Soient $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ puis $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit matriciellement

$$(S) \quad AX = B.$$

Le vecteur colonne B est le **second membre du système** (S). Le système homogène associé au système (S) est

$$(S_h) \quad AX = 0.$$

4.1.3 Présentation en colonnes

On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrices de la matrice A. Donc, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On peut écrire :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{i,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix} = x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n.$$

Le système (S) s'écrit alors

$$(S) \quad \sum_{j=1}^{n} x_jC_j = B.$$

Le système (S) est compatible si et seulement si le second membre B est combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

4.2 Systèmes de Cramer

Définition 7. Un système **de Cramer** est un système ayant autant d'équations que d'inconnues et dont la matrice est une matrice (carrée) inversible.

Théorème 20. Un système de Cramer admet une et une seule solution. En particulier, un système de Cramer homogène admet une et une seule solution à savoir la solution nulle $(0, \ldots, 0)$.

Démonstration . Notons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice du système (S). Par hypothèse, $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Mais alors, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_nX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B,$$

et

$$X = A^{-1}B \Rightarrow AX = AA^{-1}B \Rightarrow AX = I_nB \Rightarrow AX = B.$$

En résumé, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\big(AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B\big)$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la solution.

❑

4.3 Forme générale des solutions d'un système compatible

Théorème 21. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Soient (S) le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et (S_h) le système homogène associé $AX = 0$.

On suppose que le système (S) est compatible. On note X_0 une solution particulière du système (S)

Les solutions du système (S) sont les vecteurs colonnes de la forme $X_0 + Y$ où Y est une solution quelconque de (S_h). Dit autrement, la solution générale de (S) est égale à la somme d'une solution particulière de (S) et de la solution générale de (S_h).

Démonstration . On note $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_h$) l'ensemble des solutions du système (S) (resp. (S_h)). Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow X - X_0 \in \mathcal{S}_h \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{S}_h /\ X - X_0 = Y \\ &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{S}_h /\ X = X_0 + Y. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{X_0 + Y,\ Y \in \mathcal{S}_h\}$.

❑

4.4 La méthode du pivot de Gauss

Nous nous contenterons de décrire la méthode du pivot de Gauss sur un exemple simple. Dans un premier temps, nous allons résoudre un système d'équations linéaires par cette méthode puis nous allons appliquer ce travail au calcul de l'inverse d'une matrice.

4.4.1 Résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss

Considérons le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 9 \\ x - y + z = 6 \\ -x + 2y + z = -2 \end{array}\right.$. Dans la partie gauche ci-dessous, nous faisons une résolution du système avec une présentation classique et dans la partie droite, nous faisons la même résolution en écrivant uniquement les coefficients dans une matrice.

Etape 1 : nous faisons apparaître un 1 en haut à gauche ce qui est rendu possible par le fait que le coefficient en haut à gauche à savoir 2 est non nul.

Etape 2 : à l'aide du pivot égal à 1, nous faisons disparaître l'inconnue x des deux dernières équations ou encore nous faisons apparaître des 0 sous le 1 dans la matrice.

Etape 3 : le pivot est maintenant le coefficient de y dans la deuxième équation à savoir $-\dfrac{3}{2}$ et nous le remplaçons par un 1 en multipliant cette équation par $-\dfrac{2}{3}$.

Etape 4 : on se sert du pivot pour éliminer y en première et troisième équation ou encore on fait apparaître des 0 dans la matrice en deuxième colonne et première et troisième lignes. Les coefficients de la première colonne ne sont pas modifiés par les étapes 3 et 4.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 9 \\ x - y + z = 6 \\ -x + 2y + z = -2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Etape 1 : $$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ x - y + z = 6 \\ -x + 2y + z = -2 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Etape 2 : $$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z = \frac{5}{2} \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Etape 3 : $$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ y + \frac{1}{3}z = -1 \\ \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z = \frac{5}{2} \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow -\frac{2}{3}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Etape 4 : $$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{4}{3}z = 5 \\ y + \frac{1}{3}z = -1 \\ \frac{5}{3}z = 5 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right)$$

$$\text{Etape 5 :}\quad \left\{\begin{array}{l} x \quad\quad + \dfrac{4}{3}z = 5 \\ \quad y + \dfrac{1}{3}z = -1 \\ \quad\quad\quad z = 3 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow \frac{3}{5}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \end{array}\right)$$

$$\text{Etape 6 :}\quad \left\{\begin{array}{l} x \quad\quad\quad = 1 \\ \quad y \quad\quad = -2 \\ \quad\quad\quad z = 3 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{3}L_3 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(1, -2, 3)\}$.

4.4.2 Deux méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice

On veut maintenant l'inverse de la matrice du paragraphe précédent : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

• Une première technique est : si $(X, Y) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$. On est donc amené à résoudre un système d'équations linéaires par la technique de son choix. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$AX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = a \\ x - y + z = b \\ -x + 2y + z = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 3z + a \\ x - (-2x - 3z + a) + z = b \\ -x + 2(-2x - 3z + a) + z = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 3z + a \\ 3x + 4z = a + b \\ -5x - 5z = -2a + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 3z + a \\ x = -\dfrac{4}{3}z + \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}b \\ -5\left(-\dfrac{4}{3}z + \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}b\right) - 5z = -2a + c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 3z + a \\ x = -\dfrac{4}{3}z + \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}b \\ \dfrac{5}{3}z = -\dfrac{1}{3}a + \dfrac{5}{3}b + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\dfrac{1}{5}a + b + \dfrac{3}{5}c \\ x = -\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{5}a + b + \dfrac{3}{5}c\right) + \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}b \\ y = -2x - 3z + a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\dfrac{1}{5}a + b + \dfrac{3}{5}c \\ x = \dfrac{3}{5}a - b - \dfrac{4}{5}c \\ y = -2\left(\dfrac{3}{5}a - b - \dfrac{4}{5}c\right) - 3\left(-\dfrac{1}{5}a + b + \dfrac{3}{5}c\right) + a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -\dfrac{1}{5}a + b + \dfrac{3}{5}c \\ x = \dfrac{3}{5}a - b - \dfrac{4}{5}c \\ y = \dfrac{2}{5}a - b - \dfrac{1}{5}c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & -1 & -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} & -1 & -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{5} & 1 & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et on lit $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

• Une première technique est la technique du pivot de Gauss. Si on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, les trois colonnes de A^{-1} sont respectivement $A^{-1}e_1$, $A^{-1}e_2$ et $A^{-1}e_3$ ou encore les trois colonnes de A^{-1} sont respectivement la solution du système $AX = e_1$, celle du système $AX = e_2$ et celle du système $AX = e_3$. En appliquant la technique du paragraphe précédent, on peut résoudre ces trois systèmes en même temps de la façon suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{2}{3}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow \frac{3}{5}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{3}L_3 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

et on lit de nouveau $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4.5 Matrices triangulaires inversibles

Pour finir, on établit une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Théorème 22. Soit A une matrice carrée, triangulaire inférieure (resp. supérieure).

A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. De plus, en cas d'inversibilité, A^{-1} est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Démonstration . Il suffit de démontrer le résultat quand A est une matrice triangulaire inférieure car A^T est alors triangulaire supérieure et de plus, A^T est inversible si et seulement si A est inversible.

Le résultat est immédiat quand $n = 1$. On suppose dorénavant $n \geqslant 2$.

Supposons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ triangulaire inférieure (donc si $j > i$, $a_{i,j} = 0$) et inversible. Donc, il existe $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
En égalant la première ligne de la matrice $A \times B$ et de la matrice I_n, on obtient $a_{1,1}b_{1,1} = 1$ et pour $j \geqslant 2$, $a_{1,1}b_{1,j} = 0$. Ceci montre que $a_{1,1} \neq 0$ puis que pour $j \geqslant 2$, $b_{1,j} = 0$.
Supposons avoir montré que pour $j \in [\![1, n-1]\!]$ donné, $\forall k \in [\![1, j]\!]$, $a_{k,k} \neq 0$ et pour $l > k$, $b_{k,l} = 0$. La matrice $A \times B$ s'écrit explicitement

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_{j,j} & 0 & & \vdots \\ & & & a_{j+1,j+1} & 0 & \vdots \\ & & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & & \dots & & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & & \dots & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ b_{j,1} & \dots & b_{j,j} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{j+1,1} & & & b_{j+1,j+1} & b_{j+1,j+2} & \dots & b_{j+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ b_{n,1} & & \dots & & \dots & & b_{n,n} \end{pmatrix},$$

et d'autre part, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le coefficient ligne $j+1$, colonne $j+1$, de $A \times B$ est $a_{j+1,j+1}b_{j+1,j+1}$. Ce coefficient doit être égal à 1 ce qui fournit en particulier, $a_{j+1,j+1} = 0$. En poursuivant dans la même ligne (si $j < n-2$ car sinon, il n'y a plus rien à faire), les coefficients sont $a_{j+1,j+1}b_{j+1,j+2}$, puis ..., puis$a_{j+1,j+1}b_{j+1,n}$. Ces coefficients doivent être nuls et puisque $a_{j+1,j+1} \neq 0$, on obtient $b_{j+1,j+2} = \ldots = b_{j+1,n} = 0$.

On a montré par récurrence finie que, si A est inversible, tous les $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont non nuls et l'inverse de A est une matrice triangulaire inférieure.

Inversement, supposons les coefficients diagonaux de A tous non nuls et montrons que A est inversible. On rappelle que les transformations élémentaires ne modifie pas le caractère inversible ou non inversible d'une matrice. Donc, A est inversible si et seulement si les matrices suivantes le sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & a_{j,j} & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & & \dots & \dots & & a_{n,n} \end{pmatrix} (L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{1,1}} L_1) \text{ puis}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & & & \\ \vdots & \times & a_{3,3} & & & \vdots \\ & & & 0 & & \vdots \\ & & & a_{j,j} & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \times & \dots & \dots & \times & a_{n,n} \end{pmatrix} (\forall i \in [\![2, n]\!],\ L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1) \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \times & a_{3,3} & & & \vdots \\ & & & 0 & & \vdots \\ & & & a_{j,j} & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \times & \dots & \dots & \times & a_{n,n} \end{pmatrix} (L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{2,2}} L_1)$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & 0 & a_{3,3} & & & & \vdots \\ & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & a_{j,j} & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \times & \dots & \dots & \times & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ puis ... } \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \vdots \\ & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Puisque la matrice I_n est inversible, il en est de même de A.

❏