FICHE n° 20. REPÉRAGE, COORDONNÉES.

I Définition d'un repère du plan, d'une base du plan

A Vecteurs colinéaires

Définition 1

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** (on dit aussi $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.

Théoreme 1

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou ($\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et il existe un réel non nul k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$).

B Bases et repères

Définition 2

Une **base** du plan est un couple de deux vecteurs $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

La base $\mathscr{B}$ est **orthonormée** (ou orthonormale) si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont chacun une norme égale à 1.

Un **repère** du plan est un triplet $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où O est un point donné du plan et $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base du plan.

Le repère $\mathscr{R}$ est **orthonormé** (ou **orthonormal**) si et seulement si la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est orthonormée.

II Coordonnées dans un un repère orthonormé ou une une base orthonormée

1 Coordonnées dans un repère orthonormé ou une une base orthonormée

Théoreme 2

Soit $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Pour tout point M, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. De plus, x et y sont uniquement définis.

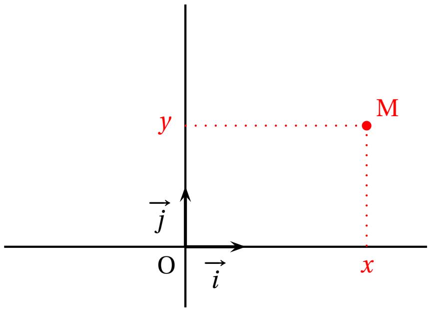
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. De plus, x et y sont uniquement définis.

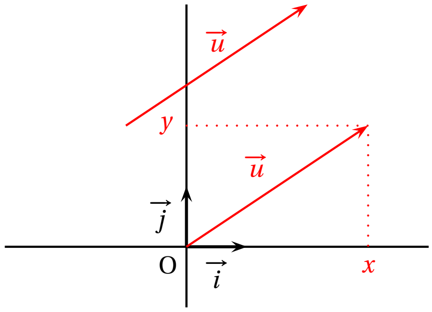
Définition 3

Soit $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soit M un point du plan. Le **couple de coordonnées** du point M dans le repère $\mathscr{R}$ est le couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. x est l'**abscisse** du point M et y est l'**ordonnée** du point M dans le repère $\mathscr{R}$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Le **couple de coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est le couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. x est l'**abscisse** du vecteur $\overrightarrow{u}$ et y est l'**ordonnée** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.





2 Formulaire

Théoreme 3

Soit $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Soient $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$ deux points du plan. Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs. Soit k un nombre réel.

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ sont $\left(x_B - x_A, y_B - y_A\right)$. En abrégé, cela donne

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \qquad \text{et} \qquad y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A.$$

2) a) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$.

b) Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

3) Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ dans le repère $\mathscr{R}$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$. En abrégé, cela donne

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

3 Calculs de distances

Théoreme 4

Soit $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1) Soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur du plan. Alors, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Soient $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$ deux points du plan. Alors, $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

4 Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs

Définition 4

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée du plan.

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan. Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) est le nombre, noté $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$, défini par :

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = xy' - yx'.$$

Théoreme 5

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée du plan. Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$.