

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique. Option A Mathématiques.

Questions préliminaires

1. On suppose $a = 0$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f solution de (P_{y_0}) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = bf(x)$ et $f(0) = y_0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-bx}f'(x) - be^{-bx}f(x) = 0 \text{ et } f(0) = y_0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (e^{-bx}f)'(x) = 0 \text{ et } f(0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-bx}f(x) = f(0)e^0 \text{ et } f(0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y_0e^{bx}.$$

Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème (P_{y_0}) admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$ à savoir la fonction $f : x \mapsto y_0e^{bx}$.

2. Soit f une solution de (P) sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

- f est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$. Mais alors $f' : x \mapsto af(\lambda x) + bf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ puis f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $k \geq 1$. Supposons que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Alors, $f' : x \mapsto af(\lambda x) + bf(x)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ puis f est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que pour tout $k \geq 1$, f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Donc, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. (a) La fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $h : y \mapsto e^y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $\varphi = h \circ g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$ en prenant $P_0 = 1$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\text{où } P_{n+1} = -X^2P'_n + 2X^3P_n \in \mathbb{R}[X].$$

Le résultat est démontré par récurrence.

(b) Soit $x \in]\alpha, \beta]$. La fonction h est continue sur $[\alpha, x]$ et dérivable sur $] \alpha, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]\alpha, x[$ tel que $\frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} = h'(c(x))$. Pour tout $x \in]\alpha, \beta]$, $\alpha < c(x) < x$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $c(x)$ tend vers α quand x tend vers α par valeurs supérieures. Mais alors, par hypothèse, $h'(c(x))$ tend vers ℓ .

Ainsi, le taux $\frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha}$ a une limite réelle quand x tend vers α par valeurs supérieures, à savoir ℓ . On en déduit que la fonction h est dérivable en α et de plus, $h'(\alpha) = \ell$. On note que la fonction h' est continue en α .

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

- φ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0 = \varphi(0)$. Donc, φ est continue en 0 puis sur $\mathbb{R}$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(n)}(0) = 0$. Alors, $\varphi^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{(n+1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} P_n(y) e^{-y^2} = 0$$

d'après un théorème de croissances comparées. De même, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi^{(n+1)}(x) = 0$. D'après la question précédente, $\varphi^{(n)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou encore φ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et de plus, $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$.

Le résultat est démontré par récurrence. Donc, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\psi(x) = \varphi((x-\alpha)(\beta-x))$. La fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $\psi^{(n)}$ est une somme de fonctions du type $x \mapsto Q_k(x) \varphi^{(k)}((x-\alpha)(\beta-x))$, $Q_k \in \mathbb{R}[X]$, $0 \leq k \leq n$. D'après la question précédente, $\psi^{(n)}(\alpha) = \psi^{(n)}(\beta) = 0$.

La fonction ψ convient.

(e) Posons $I = \int_\alpha^\beta \psi(t) dt$. I est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. Donc, $I > 0$. On peut donc poser pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\chi(x) = u + \frac{v-u}{I} \int_\alpha^x \psi(t) dt$. Puisque ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de χ . De plus, $\chi(\alpha) = u$ et $\chi(\beta) = u + \frac{v-u}{I} I = v$. Enfin, pour tout $n \geq 1$, $\chi^{(n)}(\alpha) = \frac{v-u}{I} \psi^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et de même, $\chi^{(n)}(\beta) = 0$.

La fonction χ convient.

4. (a) La fonction f' est positive sur $]0, \delta]$ et donc la fonction f est croissante sur $]0, \delta]$ puis la fonction f a une limite $\ell \in [-\infty, +\infty[$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

f' est bornée au voisinage de 0 et donc il existe $M \geq 0$ et $r \in]0, \delta]$ tels que pour tout $t \in]0, r]$, $f'(t) \leq M$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in]0, r]$, $f(r) - f(x) \leq M(r-x)$ puis $f(x) \geq f(r) - M(r-x) \geq f(r) - Mr$. La fonction f est minorée sur $]0, r]$ et donc $\ell \in \mathbb{R}$.

(b) La fonction f' est continue sur $]0, \delta]$ et de plus $f'(t) = O(t^0)$. Puisque $0 > -1$ la fonction f' est intégrable sur un voisinage de 0 puis $\int_0^\delta f'(t) dt$ est une intégrale convergente. Mais alors, $f(\varepsilon) = f(\delta) - \int_\varepsilon^\delta f'(t) dt$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie 1 : le cas $0 < \lambda < 1$

5. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle on suppose a priori $R_\alpha > 0$. Pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$. Pour tout $x \in]-R_\alpha, R_\alpha[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) - a f(\lambda x) - b f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n x^n - b \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) \alpha_{n+1} - a \lambda^n \alpha_n - b \alpha_n) x^n. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, f est solution de (P) sur $] -R_\alpha, R_\alpha[$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) \alpha_{n+1} - a \lambda^n \alpha_n - b \alpha_n = 0$ ou encore, pour tout $n \geq 1$ $n \alpha_n = a \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + b \alpha_{n-1}$

6. Si $\alpha_0 = 0$, alors par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $\alpha_n = 0$ puis $R_\alpha = +\infty$. On suppose maintenant $\alpha_0 \neq 0$.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \lambda^{n_0-1} + b = 0$, alors par récurrence, pour tout $n \geq n_0$, $\alpha_n = 0$ puis $R_\alpha = +\infty$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a \lambda^{n-1} + b \neq 0$. Dans ce cas, par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $\alpha_n \neq 0$ puis, pour tout $n \geq 1$, $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{n} (a \lambda^{n-1} + b)$ puis $\left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \right|_{n \rightarrow +\infty} = o(1)$ (car $0 < \lambda < 1$). D'après la règle de d'ALEMBERT, $R_\alpha = +\infty$.

Dans tous les cas, $R_\alpha = +\infty$ ce qui valide les calculs de la question précédente sur $\mathbb{R}$.

7. Soit α la suite définie par $\alpha_0 = y_0$ et pour tout $n \geq 1$, $n \alpha_n = a \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + b \alpha_{n-1}$. D'après les deux questions précédentes, la fonction f est solution de (P_{y_0}) sur $\mathbb{R}$.

8. • Soit $f \in \mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$. f est continue sur le segment $[-A, A]$ et en particulier, f est bornée sur ce segment. Mais alors, $\|f\|_\infty$ existe dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que $\|\cdot\|_\infty$ est une application de $\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $f \in \mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty \geq |f(0)| \geq 0$ (positivité).

• Pour tout $f \in \mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in [-A, A], |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in [-A, A], f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$ (axiome de séparation).

• Soient $f \in \mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que pour toute partie non vide P de $\mathbb{R}$ et tout réel positif k , $\sup(kP) = k \sup(P)$. Donc, $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)|, x \in [-A, A]\} = |\lambda| \sup\{|f(x)|, x \in [-A, A]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$ (homogénéité).

• Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R}))^2$. Pour tout $x \in [-A, A]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\{|f(x) + g(x)|, x \in [-A, A]\}$. Puisque $\|f + g\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (inégalité triangulaire).

On a montré que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$.

9. Soit $g \in \mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$. Puisque $0 < \lambda < 1$, pour tout $t \in [-A, A]$, $\lambda t \in [-A, A]$. Par suite, la fonction $t \mapsto ag(\lambda t) + bg(t)$ est continue sur $[-A, A]$. On en déduit que $T_A g$ est bien définie sur $[-A, A]$ et de plus, $T_A g$ est continue sur $[-A, A]$. Ainsi, T_A est une application de $\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$ vers $\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$.

Soit f une solution de (P_{y_0}) sur $[-A, A]$. f est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et pour tout $x \in [-A, A]$,

$$T_A f(x) = y_0 + \int_0^x (af(\lambda t) + bf(t)) dt = y_0 + \int_0^x f'(t) dt = y_0 + f(x) - f(0) = f(x)$$

et donc $T_A f = f$.

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R})$ telle que $T_A f = f$. Alors, pour tout $x \in [-A, A]$, $f(x) = y_0 + \int_0^x (af(\lambda t) + bf(t)) dt$.

Puisque f est continue sur $[-A, A]$, la fonction $x \mapsto \int_0^x (af(\lambda t) + bf(t)) dt$ est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et il en est de même de f . En dérivant, on obtient pour tout $x \in [-A, A]$, $f'(x) = af(\lambda x) + bf(x)$. Donc, f vérifie (P) sur $\mathbb{R}$. Enfin, $f(0) = y_0$ et donc f vérifie (P_{y_0}) sur $\mathbb{R}$.

10. Soit $A > 0$. Soit $(g_1, g_2) \in (\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R}))^2$. Pour tout $x \in [0, A]$,

$$\begin{aligned} |T_A g_1(x) - T_A g_2(x)| &= \left| \int_0^x (a(g_1 - g_2)(\lambda t) + b(g_1 - g_2)(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^x (|a|(g_1 - g_2)(\lambda t) + |b|(g_1 - g_2)(t)) dt \\ &\leq \int_0^x (|a| + |b|) \|g_1 - g_2\|_\infty dt = x(|a| + |b|) \|g_1 - g_2\|_\infty \\ &\leq A(|a| + |b| + 1) \|g_1 - g_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Si $x \in [-A, 0]$, le changement de variables $u = -t$ ramène à la situation précédente et donc, pour tout $x \in [-A, A]$, $|T_A g_1(x) - T_A g_2(x)| \leq A(|a| + |b| + 1) \|g_1 - g_2\|_\infty$ puis $\|T_A g_1 - T_A g_2\|_\infty \leq A(|a| + |b| + 1) \|g_1 - g_2\|_\infty$.

On prend alors $A = \frac{1}{2(|a| + |b| + 1)} > 0$ et on a pour tout $(g_1, g_2) \in (\mathcal{C}([-A, A], \mathbb{R}))^2$, $\|T_A g_1 - T_A g_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty$.

11. Soient f_1 et f_2 deux solutions de (P_{y_0}) sur $[-A, A]$ (A ayant été défini à la question précédente). Alors, d'après la question 9. et la question précédente,

$$\|f_1 - f_2\|_\infty = \|T_A f_1 - T_A f_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_\infty$$

puis $\frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_\infty \leq 0$ puis $\|f_1 - f_2\|_\infty = 0$ et finalement $f_1 = f_2$. Ceci montre l'unicité d'une solution au problème (P_{y_0}) sur $[-A, A]$.

12. Soient f_1 et f_2 deux solutions de (P_{y_0}) sur $\left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$. Pour tout $x \in \left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$,

$$(f_1 - f_2)'(x) - b(f_1 - f_2)(x) = a(f_1 - f_2)(\lambda x) = 0$$

car pour tout $x \in \left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$, $\lambda x \in [-B, B]$ et par unicité de la solution à (P_{y_0}) sur $[-B, B]$. $f_1 - f_2$ est donc solution sur $\left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$ de l'équation différentielle $y' - by = 0$ sur $\left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$ puis il existe un réel k tel que pour tout $x \in \left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$, $(f_1 - f_2)(x) = ke^{bx}$. En évaluant les deux membres de cette égalité en 0, on obtient $k = (f_1 - f_2)(0) = 0$ et donc pour tout $x \in \left[-\frac{B}{\lambda}, \frac{B}{\lambda}\right]$, $f_1(x) = f_2(x)$.

13. D'après la question **7.**, l'équation (P_{y_0}) admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Soient f_1 et f_2 deux solutions de (P_{y_0}) sur $\mathbb{R}$. D'après la question **11.**, f_1 et f_2 coïncident sur $[-A, A]$ où $A = \frac{1}{2(|a| + |b| + 1)}$.

D'après la question précédente, f_1 et f_2 coïncident encore sur $\left[-\frac{A}{\lambda}, \frac{A}{\lambda}\right]$ puis, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_1 et f_2 coïncident sur $\left[-\frac{A}{\lambda^n}, \frac{A}{\lambda^n}\right]$ et finalement, f_1 et f_2 coïncident sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[-\frac{A}{\lambda^n}, \frac{A}{\lambda^n}\right]$. Enfin, $0 < \lambda < 1$ (et $A > 0$) et donc,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{\lambda^n} = +\infty$. Par suite, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[-\frac{A}{\lambda^n}, \frac{A}{\lambda^n}\right] = \mathbb{R}$ puis f_1 et f_2 coïncident sur $\mathbb{R}$. Ceci montre l'unicité de f .

On a montré que (P_{y_0}) admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : le cas $\lambda > 1$

14. Avec les notations de la question **5.**, pour tout $n \geq 1$, $n\alpha_n = a\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + b\alpha_{n-1} = (a\lambda^{n-1} + b)\alpha_{n-1}$. Si $\alpha_0 \neq 0$ et si pour tout $n \geq 1$, $a\lambda^{n-1} + b \neq 0$, alors par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \neq 0$ puis pour tout $n \geq 1$, $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = a\lambda^{n-1} + b$ puis, en tenant compte de $\lambda > 1$,

$$\left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a|\lambda^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Dans ce cas, $R_\alpha = 0$ puis la fonction $f : x \mapsto y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n$ n'est définie sur aucun voisinage de 0.

Par contre, si il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^{n_0-1} = -\frac{b}{a}$, la suite α est nulle à partir du rang n_0 puis la fonction f est solution de (P_{y_0}) sur $\mathbb{R}$ (oubli probable de l'énoncé).

15. Puisque $x_0 > 0$ et $\lambda > 1$, $\lambda x_0 > x_0 \geq x^*$. De plus, puisque $x^* > 0$ et $\lambda > 1$, l'intervalle $]x^*, +\infty[$ est stable par l'application $t \mapsto \lambda t$. Puisque f est solution de (P) sur $]x^*, +\infty[$, pour tout $x \in]x^*, +\infty[$, $f'(x) = af(\lambda x) + bf(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant n fois, on obtient pour tout $x \in]x^*, +\infty[$, $f^{(n+1)}(x) = a\lambda^n f^{(n)}(\lambda x) + bf^{(n)}(x)$ et en particulier,

$$f^{(n+1)}(x_0) = a\lambda^n f^{(n)}(\lambda x_0) + bf^{(n)}(x_0).$$

16. Pour $x \in [x_0, \lambda x_0]$, posons $f(x) = g(x)$ et pour $x \in [\lambda x_0, \lambda^2 x_0]$, posons $f(x) = \frac{1}{a} \left(g' \left(\frac{x}{\lambda} \right) - bg \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right)$. La fonction f est de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda x_0]$ et sur $[\lambda x_0, \lambda^2 x_0]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [\lambda x_0, \lambda^2 x_0]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{a\lambda^n} \left(g^{(n+1)} \left(\frac{x}{\lambda} \right) - bg^{(n)} \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} f(x) = \frac{1}{a} (g'(x_0) - bg(x_0)) = -\frac{b}{a} g(x_0) = g(\lambda x_0) = f(\lambda x_0)$. La fonction f est continue à droite en λx_0 puis f est continue sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$. Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$.

• Le résultat est vrai quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons f de classe C^n sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$. Alors $f \in C^n([x_0, \lambda^2 x_0], \mathbb{R}) \cap C^{n+1}([x_0, \lambda^2 x_0] \setminus \{\lambda x_0\}, \mathbb{R})$.

De plus, quand x tend vers λx_0 par valeurs inférieures, $f^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x)$ tend vers $g^{(n+1)}(\lambda x_0) = 0$ et quand

x tend vers λx_0 par valeurs supérieures, $f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{a\lambda^{n+1}} \left(g^{(n+2)} \left(\frac{x}{\lambda} \right) - bg^{(n+1)} \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right)$ tend vers

$\frac{1}{a\lambda^{n+1}} (g^{(n+2)}(x_0) - g^{(n+1)}(x_0)) = 0$. Ainsi, $f^{(n+1)}$ a une limite réelle en λx_0 . D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^{n+1} sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$.

Le résultat est démontré par récurrence. f est de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$. Ensuite, pour tout $x \in [x_0, \lambda x_0]$,

$$\frac{1}{a}(f'(x) - bf(x)) = \frac{1}{a}(g'(x) - bg(x)) = f(\lambda x)$$

puis $f'(x) = af(\lambda x) + bf(x)$. f vérifie (P) sur $[x_0, \lambda x_0]$. Ensuite, $f(\lambda^2 x_0) = \frac{1}{a}(g'(\lambda x_0) - bg(\lambda x_0)) = \frac{1}{a} \times -bg(\lambda x_0) = -\frac{b}{a}f(\lambda x_0)$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(\lambda^2 x_0) = \frac{1}{a\lambda^n}(g^{(n+1)}(\lambda x_0) - bg^{(n)}(\lambda x_0)) = 0$.

17. La fonction f définie maintenant sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$ vérifie les mêmes hypothèses que g sur l'intervalle $[\lambda x_0, \lambda^2 x_0]$. On peut donc étendre f à $[\lambda^2 x_0, \lambda^3 x_0]$ de sorte que f est de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda^3 x_0]$, f est solution de (P) sur $[x_0, \lambda^2 x_0]$ et f vérifie les mêmes hypothèses que g sur $[\lambda^2 x_0, \lambda^3 x_0]$. Mais alors, par récurrence, pour tout $k \geq 2$, on peut prolonger f en une fonction de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda^k x_0]$ telle que f vérifie (P) sur $[x_0, \lambda^{k-1} x_0]$.

Finalement, on peut prolonger f en une fonction de classe C^∞ sur $\bigcup_{k=1}^{+\infty} [x_0, \lambda^k x_0] = [x_0, +\infty[$ (car $\lambda > 1$) telle que f est solution de (P) sur $[x_0, +\infty[$.

18. On veut que pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$, $f'(x) = af(\lambda x) + bf(x) = ag(\lambda x) + bf(x)$ ou encore on veut que f soit solution sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$ de l'équation différentielle $y' - by = ag(\lambda x)$. Les solutions sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$ de cette équation sont les fonctions de la forme $h : x \mapsto ke^{bx} + ae^{bx} \int_{x_0}^x e^{-bt} g(\lambda t) dt$, $k \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $h(x_0) = g(x_0)$ fournit $k = g(x_0)e^{-bx_0}$. Donc, nécessairement,

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right], f(x) = g(x_0)e^{b(x-x_0)} + ae^{bx} \int_{x_0}^x e^{-bt} g(\lambda t) dt.$$

Réciproquement, soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$, $f(x) = g(x_0)e^{b(x-x_0)} + ae^{bx} \int_{x_0}^x e^{-bt} g(\lambda t) dt$ et pour tout $x \in [x_0, \lambda x_0]$, $f(x) = g(x)$.

Si $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$, alors pour tout $t \in [x, x_0]$, $\lambda t \in [x_0, \lambda x_0]$ et donc la fonction $t \mapsto g(\lambda t)$ est continue sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$ de sorte que $f(x)$ existe. La fonction f est bien définie sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, \lambda x_0\right]$.

f est continue sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$ et sur $[x_0, \lambda x_0]$. De plus, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g(x_0)e^0 + 0 = f(x_0)$. Donc, f est continue sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, \lambda x_0\right]$.

f est de classe C^1 sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$ et sur $[x_0, \lambda x_0]$. De plus, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$, $f'(x) = bg(\lambda x) + af(x)$ puis

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = bg(\lambda x_0) + ag(x_0) = 0.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^1 sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$. En particulier, f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = 0 = g'(x_0) = f'_d(x_0)$. f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$. f' est alors continue en x_0

puis f est de classe C^1 sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, \lambda x_0\right]$ et par construction, solution de (P) sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$.

19. Soit g une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. D'après la question précédente, g s'étend déjà à une fonction f de classe C^1 sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, \lambda x_0\right]$ et solution de (P) sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$. f est de classe C^∞ sur $[x_0, \lambda x_0]$ (car coïncide avec g sur cet intervalle). Par récurrence, à partir du fait que f est solution sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$ de $y' - by = ag(\lambda x)$ et grâce au théorème de la limite de la dérivée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^n sur $\left[\frac{x_0}{\lambda}, \lambda x_0\right]$ et $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$, $f'(x) = af(\lambda x) + bf(x)$. En dérivant n fois, $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda}, x_0\right]$, $f^{(n+1)}(x) = a\lambda^n f^{(n)}(\lambda x) + bf^{(n)}(x)$ puis en évaluant en $\frac{x_0}{\lambda}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+1)}\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) = a\lambda^n f^{(n)}(x_0) + bf^{(n)}\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) = bf^{(n)}\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) = b^{n-1}f'\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)$.

$f'\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) = af(x_0) + bf\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)$ et donc les deux membres de l'égalité sont simultanément nuls ou pas et en cas de nullité, les $f^{(n)}\left(\frac{x_0}{\lambda}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont tous nuls.

Je n'ai pas réussi ensuite à recoller les morceaux pour prolonger à gauche par récurrence.

20. • Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{f\left(\frac{x_0}{\lambda^{k+1}}\right)}{f\left(\frac{x_0}{\lambda^k}\right)} - 1 \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{K}{\lambda^k} = K \frac{1 - \frac{1}{\lambda^{n+1}}}{1 - \frac{1}{\lambda}} \leq \frac{K}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \frac{K\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \ln \left(\left| \frac{f\left(\frac{x_0}{\lambda^{n+1}}\right)}{f(x_0)} \right| \right) &= \ln \left(\prod_{k=0}^n \left| \frac{f\left(\frac{x_0}{\lambda^{k+1}}\right)}{f\left(\frac{x_0}{\lambda^k}\right)} \right| \right) \quad (\text{produit télescopique}) \\ &= \sum_{k=0}^n \ln \left(\left| \frac{f\left(\frac{x_0}{\lambda^{k+1}}\right)}{f\left(\frac{x_0}{\lambda^k}\right)} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left(\left| \frac{f\left(\frac{x_0}{\lambda^{k+1}}\right)}{f\left(\frac{x_0}{\lambda^k}\right)} - 1 \right| \right) \quad (\text{inégalité de convexité}) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{f\left(\frac{x_0}{\lambda^{k+1}}\right)}{f\left(\frac{x_0}{\lambda^k}\right)} - 1 \right| \\ &\leq \frac{K\lambda}{\lambda - 1}, \end{aligned}$$

puis

$$\left| f\left(\frac{x_0}{\lambda^{n+1}}\right) \right| \leq |f(x_0)| e^{\frac{K\lambda}{\lambda-1}} \quad (\star).$$

cette inégalité étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et tout $x_0 \in]0, +\infty[$).

Ensuite, la fonction f est continue et donc bornée sur le segment $[x_0, \lambda x_0]$. On note M un majorant de la fonction $|f|$ sur ce segment. Soit $x \in]0, x_0[$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \left[\frac{x_0}{\lambda^{n+1}}, \frac{x_0}{\lambda^n} \right]$ (car la suite $\left(\frac{x_0}{\lambda^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite nulle) et donc $\lambda^{n+1}x \in [x_0, \lambda x_0]$. D'après $(\star)$,

$$|f(x)| \leq |f(\lambda^{n+1}x)| e^{\frac{K\lambda}{\lambda-1}} \leq M e^{\frac{K\lambda}{\lambda-1}}.$$

Le réel $M e^{\frac{K\lambda}{\lambda-1}}$ ne dépend pas de x et on a donc montré que la fonction f est bornée sur $]0, \lambda x_0[$.

• Puisque pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = af(\lambda x) + bf(x)$, on en déduit que la fonction f' est bornée sur $]0, x_0[$. D'après la question **4.b)**, on en déduit que la fonction f a une limite réelle quand x tend vers 0.