EPITA IPSA ESME

CONCOURS

**CPGE**

EPITA - IPSA - ESME

**1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS POUR VOUS PRÉPARER À UNE MULTITUDE DE MÉTIERS**

Samedi 11 avril 2026

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*MP - MPI - PC - PSI*

DURÉE : 3 HEURES

**Conditions particulières :**
Calculatrice et documents interdits

Le sujet comporte 3 pages.

Le sujet est compos®de trois exercices ind®pendants.

## Exercice 1 - Décomposition spectrale d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice telle que $(A-I_4)(A-2I_4)^2 = 0_4$ $\big(0_4$ désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})\big)$.
On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A$.
L'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$ sera noté id.

**Q1.** Vérifier que $I_4 = (A-2I_4)^2 + (A-I_4)(3I_4-A)$ et en déduire que $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A-I_4) \oplus \mathrm{Ker}\big((A-2I_4)^2\big)$.

On note alors $p_1$ (respectivement $p_2$) la projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\big((u-2\mathrm{id})^2\big)$ $\big($respectivement sur $\mathrm{Ker}\big((u-2\mathrm{id})^2\big)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})\big)$.
On notera aussi $\Pi_1$ (respectivement $\Pi_2$) la matrice représentative de $p_1$ (respectivement $p_2$) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

**Q2.** Justifier que $\Pi_1 = (A-2I_4)^2$ et $\Pi_2 = (A-I_4)(3I_4-A)$.

On pose alors $D = \Pi_1 + 2\Pi_2$ et $N = A - D$.

**Q3.** (a) Calculer $\Pi_1 + \Pi_2$, $\Pi_1\Pi_2$, $\Pi_2\Pi_1$, $\Pi_1^2$ et $\Pi_2^2$.
(b) Déterminer des réels $a$ et $b$ tels que $D^2 = aD + bI_4$ puis justifier que $D$ est diagonalisable.
(c) Vérifier que $N\Pi_1 = N^2\Pi_2 = 0_4$ et en déduire que $N$ est nilpotente.

On suppose dans les dernières questions que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et on pourra admettre sans le vérifier que : $(A-I_4)(A-2I_4)^2 = 0_4$.

**Q4.** Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$ ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.
$A$ est-elle diagonalisable ? On justifiera sa réponse.

**Q5.** On définit comme précédemment : $\Pi_1 = (A-2I_4)^2$, $\Pi_2 = (A-I_4)(3I_4-A)$, $D = \Pi_1 + 2\Pi_2$ et $N = A - D$.
On peut admettre sans calcul que :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier à partir de ces expressions que $D$ est diagonalisable et que $N$ est nilpotente.

**Q6.** Donner l'expression explicite de $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 2 - Intégrale de Gauss

On pose lorsque cela a un sens : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$.

**Q7.** Démontrer que $g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

**Q8.** Démontrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

**Q9.** Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

**Q10.** Démontrer que $g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de $g'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

On pose dans la suite $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

**Q11.** Démontrer que $I$ est une intégrale convergente.

**Q12.** Démontrer que $h$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x > 0,\ h(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

**Q13.** Établir que : $\forall x > 0,\ g'(x) - g(x) = -\dfrac{I}{\sqrt{x}}$.

**Q14.** Résoudre cette équation différentielle par la méthode de variation de la constante et en déduire une expression de $g(x)$ en fonction de $h(\sqrt{x})$ pour $x > 0$.

**Q15.** En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

## Exercice 3. Entropie d'une variable aléatoire réelle discrète

Dans tout l'exercice on adopte la convention : $x\ln(x) = 0$ si $x = 0$.

**Cas d'une variable aléatoire $X$ réelle discrète finie.**

Soit $X$ à valeurs dans l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < \dots < x_n$). On définit l'entropie de $X$ comme étant le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k)$$

où on a posé $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

**Q16.** Démontrer que $H(X) \geq 0$. À quelle condition a-t-on $H(X) = 0$ ?

**Q17.** Dans cette question seulement on suppose que $X$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ c'est-à-dire que $p_k = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Démontrer que $H(X) = \ln(n)$.

**Q18.** Justifier que : $\forall x \geq 0,\ -x\ln(x) \leq 1 - x$. En déduire que : $H(X) \leq \ln(n)$.

**Q19.** On suppose que $H(X) = \ln(n)$. Démontrer que $X$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

**Cas d'une variable aléatoire $X$ réelle discrète infinie.**

Soit $X$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ ; on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \mathbb{P}(X = n)$. On dit que $X$ a une entropie lorsque la série $\sum p_n |\ln(p_n)|$ converge et dans ce cas on appelle entropie de $X$ le réel :

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ln(p_n)$$

**Q20.** Soit $\alpha \in ]0, 1[$. Si $Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\alpha$ démontrer que $Y$ a une entropie et donner la valeur de $H(Y)$.

**Q21.** On suppose dans cette question que $X$ a une espérance.

(a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \sqrt{p_n}|\ln(p_n)| \leq 1$.

(b) En distinguant les cas $p_n \leq \dfrac{1}{n^3}$ et $p_n > \dfrac{1}{n^3}$ démontrer ensuite que :

$$\forall n \geq n_0, \quad p_n|\ln(p_n)| \leq \max\left(\frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n\ln(n)\right)$$

(c) En déduire que $X$ a une entropie.

**Q22.** Soit $\alpha \in ]0, 1[$. On suppose que $Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\alpha$ et que $X$ a la même espérance que $Y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \mathbb{P}(Y = n)$ et $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.
On suppose aussi que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n > 0$.

(a) Démontrer que $H(X) - H(Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ln\left(\frac{q_n}{p_n}\right)$.

(b) *On admet dans cette question l'inégalité de Jensen :*
*si $f$ est une fonction concave et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, si $(t_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels de $\mathbb{R}_+^*$ et si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs ou nuls telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(t_n)p_n \leq f\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n p_n\right)$ dès que les deux séries en jeu convergent.*

Donner le signe de $H(X) - H(Y)$. Conclusion ?

(c) Soit $f$ une fonction concave et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Démontrer que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ f(x) - f(y) \leq f'(y)(x - y)$. En déduire l'inégalité de Jensen.