Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques

Exercice 1 - Décomposition spectrale d'une matrice

Q1. $(A - 2I_4)^2 + (A - I_4)(3I_4 - A) = A^2 - 4A + 4I_4 - A^2 + 4A - 3I_4 = I_4$.

Soit alors $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par X à droite et on obtient

$$X = Y + Z \text{ où } Y = (A - 2I_4)^2 X \text{ et } Z = (A - I_4)(3I_4 - A)X. \qquad (\star)$$

Maintenant, $(A - I_4)Y = (A - I_4)(A - 2I_4)^2 X = 0$ puis $Y \in \text{Ker}(A - I_4)$.
De même, $(A - 2I_4)^2 Z = (A - 2I_4)^2 (A - I_4)(3I_4 - A)X = 0$ et donc $Z \in \text{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right)$. Ceci montre que

$$\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A - I_4) + \text{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right).$$

Si de plus, $X \in \text{Ker}(A - I_4) \cap \text{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right)$, l'égalité $(\star)$ fournit $X = 0$ (deux polynômes en A commutent). Donc, $\text{Ker}(A - I_4) \cap \text{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right) = \{0\}$ et finalement

$$\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A - I_4) \oplus \text{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right).$$

Q2. D'après la question précédente, pour tout $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $X = Y + Z$ avec $Y = (A - 2I_4)^2 X \in \text{Ker}(A - I_4)$ et $Z = (A - I_4)(3I_4 - A) \in \text{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right)$. Donc,

$$\forall X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ \Pi_1 X = (A - 2I_4)^2 X \text{ et } \Pi_2 X = (A - I_4)(3I_4 - A)X.$$

Donc, $\Pi_1 = (A - 2I_4)^2$ et $\Pi_2 = (A - I_4)(3I_4 - A)$.

Q3. **(a)** On sait que $\Pi_1 + \Pi_2 = I_4$, $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0_4$, $\Pi_1^2 = \Pi_1$ et $\Pi_2^2 = \Pi_2$. Vérifions le explicitement.

$\Pi_1 + \Pi_2 = (A - 2I_4)^2 + (A - I_4)(3I_4 - A) = I_4$ d'après la question **Q1**.
$\Pi_1\Pi_2 = (A - 2I_4)^2 (A - I_4)(3I_4 - A) = 0_4 (3I_4 - A) = 0_4 = \Pi_2\Pi_1$ car deux polynômes en A commutent.
$\Pi_1^2 = (A - 2I_4)^2 \left(A^2 - A - 3A + 3I_4 + I_4\right) = A(A - I_4)(A - 2I_4)^2 - 3(A - I_4)(A - 2I_4)^2 + (A - 2I_4)^2 = (A - 2I_4)^2$ et donc $\Pi_1^2 = \Pi_1$.
$\Pi_2^2 = (I_4 - \Pi_1)^2 = I_4 - 2\Pi_1 + \Pi_1^2 = I_4 - \Pi_1 = \Pi_2$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Π_1 et Π_2 commutent en tant que polynômes en A puis

$$D^2 = (\Pi_1 + 2\Pi_2)^2 = \Pi_1^2 + 4\Pi_1\Pi_2 + 4\Pi_2^2 = \Pi_1 + 4\Pi_2$$

puis

$$D^2 - aD - bI_4 = \Pi_1 + 4\Pi_2 - a(\Pi_1 + 2\Pi_2) - b(\Pi_1 + \Pi_2) = (1 - a - b)\Pi_1 + (4 - 2a - b)\Pi_2.$$

On choisit a et b tels que $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$ c'est-à-dire $a = 3$ et $b = -2$ et on obtient

$$D^2 = 3D - 2I_4.$$

Le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de D. Donc, D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(c) $N\Pi_1 = (A - \Pi_1 - 2\Pi_2)\Pi_1 = A\Pi_1 - \Pi_1 = (A - I_4)(A - 2I_4)^2 = 0$. Ensuite,
$D = (A - 2I_4)^2 + 2(A - I_4)(3I_4 - A) = -A^2 + 4A - 2I_4$ et donc $N = A - D = A^2 - 3A + 2I_4 = (A - I_4)(A - 2I_4)$.

Ensuite, puisque deux polynômes en N commutent, $N\Pi_1 = (A - I_4)(A - 2I_4)(A - 2I_4)^2 = (A - I_4)(A - 2I_4)^2(A - 2I_4) = 0_4$ puis $N^2 = (A - I_4)^2(A - 2I_4)^2 = (A - I_4)(A - I_4)(A - 2I_4)^2 = 0_4$ et en particulier, $N^2\Pi_2 = 0_4$.

On a ainsi écrit : $A = D + N$ où D est diagonalisable, N est nilpotente et $ND = DN$ (car deux polynômes en A commutent).

Q4. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2)^2$ (déterminant par blocs).
Donc, $\mathrm{Sp}(A) = (1, 1, 2, 2)$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z+t=0 \\ x+t=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=-t \\ x=-t \end{array} \right. .$$

$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ y \\ -t \\ t \end{pmatrix},\ (y,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(U_1, U_2)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x=0 \\ -y=0 \\ t=0 \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=y=t=0.$$

$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\,(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'ordre de multiplicité de la valeur propre 2, à savoir 2, n'est pas égale à la dimension du sous-espace propre correspondant, à savoir 1. Donc, A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Q5. $\chi_D = (X-1)^2(X-2)^2$. Ensuite,

$$\mathrm{rg}\,(D - I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

et donc, d'après le théorème du rang, $\dim\,(E_1(A)) = 4 - 2 = 2$. Ensuite,

$$\mathrm{rg}\,(D - 2I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

et donc, d'après le théorème du rang, $\dim\,(E_2(A)) = 4 - 2 = 2$.

Ainsi, χ_D est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de D est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. On en déduit que D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Enfin, $N^2 = (E_{3,1} + E_{3,4})^2 = E_{3,1}^2 + E_{3,1}E_{4,2} + E_{4,2}E_{3,1} + E_{4,2}^2 = 0_4$. Donc, N est nilpotente d'indice 2.

Q6. $A^0 = I_4$. Soit $n \geqslant 1$. En tenant compte du fait que les matrices D et N commutent (en tant que polynômes en A), la formule du binôme de Newtion fournit $A^n = (D+N)^n = D^n + nND^{n-1}$ car pour $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.

Puisque D est diagonalisable, le polynôme minimal de D est $\mu_D = (X-1)(X-2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par μ_D s'écrit $X^n = Q_n(X-1)(X-2) + a_nX + b_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant en 1 et 2, on obtient $a_n + b_n = 1$ et $2a_n + b_n = 2^n$. Par suite, $a_n = 2^n - 1$ (en retranchant membre à membre les deux équations) puis $b_n = 1 - a_n = 2 - 2^n$. Ainsi, $X^n = Q_n(X-1)(X-2) + (2^n - 1)\,X + 2 - 2^n$.

En évaluant en D, on obtient

$$D^n = (2^n - 1)\, D + (2 - 2^n)\, I_4 = (2^n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (2 - 2^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2^n + 1 & 0 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Par suite, pour $n \geqslant 1$,

$$A^n = D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2^n + 1 & 0 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} . + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} + 1 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} - 1 & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2^n + 1 & 0 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2^n + n2^{n-1} + 1 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 2^n - 1 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

Exercice 2 - Intégrale de Gauss

Q7. soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$ (car $x \geqslant 0$). Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$. On en déduit l'existence de $g(x)$ dans $\mathbb{R}$.

On a montré que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Q8. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \end{array}$ de sorte que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)\, dt$.

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
- Pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$, $|\Phi(x, t)| = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ (car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$.

Q9. Soit $x > 0$. $|g(x)| = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt$ puis, en posant $u = t\sqrt{x}$,

$$|g(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du.$$

(les intégrales avant et après changement de variable étant de même nature c'est-à-dire convergentes). Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Q10. Soit $a > 0$. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} [a, +\infty[\times]-\infty, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \end{array}$ de sorte que, pour tout $x \geqslant a$, $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)\, dt$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
- Pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x, t)$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et de plus,

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]-\infty, +\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

Ensuite,

- pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$,

- pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a + \infty[$,

- pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right| = \dfrac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt^2} \leqslant e^{-at^2} = \varphi_1(t)$. De plus, φ_1 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ car négligeable en $+\infty$ et $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction g est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a montré que la fonction g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt.$$

Q11. On a vu à la question **Q9** que I est une intégrale convergente.

Q12. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc, la fonction $h :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^{-x^2}$.

Soit $x > 0$. En posant $u = t^2$ et donc $t = \sqrt{u}$ puis $dt = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$, on obtient

$$h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \int_0^{x^2} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\, du.$$

Q13. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} g'(x) - g(x) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1+t^2\right) e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du \text{ (d'après la question } \mathbf{Q9}\text{)} \\ &= -\frac{I}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Q14. Les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation homogène associée, à savoir $y' - y = 0$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ensuite, il existe une solution de l'équation $y' - y = -\dfrac{I}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ de la forme $f\ :\ x \mapsto \lambda(x) e^x$ où λ est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ f'(x) - f(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \forall x > 0,\ \lambda'(x) e^x = -\frac{I}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \forall x > 0,\ \lambda'(x) = -\frac{I e^{-x}}{\sqrt{x}} = -2I \frac{d}{dx}\left(h\left(\sqrt{x}\right)\right) \\ \Leftarrow \forall x > 0,\ \lambda(x) = -2Ih\left(\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y' - y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction $f\ :\ x \mapsto -2Ih\left(\sqrt{x}\right) e^x$ puis, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0,\ g(x) = \lambda e^{x} - 2Ie^{x}h\left(\sqrt{x}\right).$$

Q15. $\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \dfrac{1}{2}\mathrm{I}$ (par parité). Puisque pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{x}\left(\lambda - 2\mathrm{I}h\left(\sqrt{x}\right)\right)$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on a nécessairement $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda - 2\mathrm{I}h\left(\sqrt{x}\right) = \lambda - \mathrm{I}_2$ puis $\lambda = \mathrm{I}^2$. Ainsi,

$$\forall x > 0,\ g(x) = e^{x}\left(\mathrm{I}^2 - 2\mathrm{I}h\left(\sqrt{x}\right)\right).$$

Maintenant, la fonction g est continue en 0 et donc

$$\mathrm{I}^2 = \lim_{x\to0^+} g(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

puis, en tenant compte du fait que $\mathrm{I} \geqslant 0$,

$$\mathrm{I} = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 3 - Entropie d'une variable aléatoire réelle discrète

Cas d'une variable aléatoire réelle discrète finie

Q16. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \in [0, 1]$ et donc $-p_k \ln(p_k) \geqslant 0$ (y compris si $p_k = 0$) puis en sommant, $H(X) \geqslant 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned} H(X) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} -p_k \ln(p_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ -p_k \ln(p_k) = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ p_k \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Maintenant si deux aux moins des p_k sont égaux à 1 ou si tous les p_k sont nuls, on n'a pas $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Finalement, $H(X) = 0$ si et seulement si l'un des p_k est égal à 1 et les autres sont nuls ce qui équivaut au fait que X est une variable certaine.

Q17. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$ puis

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = n \times \frac{1}{n}\ln(n) = \ln(n).$$

Q18. La fonction ln est strictement concave sur $]0, +\infty[$ car de dérivée seconde $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ strictement négative sur $]0, +\infty[$. Son graphe est au-dessous de sa tangente en son point d'abscisse 1 ce qui fournit pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. De plus, $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors, $\dfrac{1}{x} \in]0, +\infty[$ puis $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x} - 1$ puis $-x\ln(x) \leqslant 1 - x$ avec égalité si et seulement si $x = 1$. Avec la convention de l'énoncé, l'inégalité est encore valable pour $x = 0$ et cette inégalité est stricte. On a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ -x\ln(x) \leqslant 1 - x \text{ avec égalité si et seulement si } x = 1.$$

Mais alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $-(np_k)\ln(np_k) \leqslant 1 - np_k$ puis, en sommant,

$$n\sum_{k=1}^{n} -p_k \ln(np_k) = \sum_{k=1}^{n} -(np_k)\ln(np_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(1 - np_k) = n - n\sum_{k=1}^{n} p_k = 0$$

et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} -p_k \ln(np_k) \leqslant 0$. D'autre part, $\sum\limits_{k=1}^{n} -p_k \ln(np_k) = -\ln(n)\sum\limits_{k=1}^{n} p_k - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k) = -\ln(n) + H(X)$ et donc

$$H(X) \leqslant \ln(n).$$

Q19. L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si toutes les inégalités écrites sont des égalités ou encore pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $-(np_k)\ln(np_k) = 1 - np_k$ ou encore pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $np_k = 1$ (cas d'égalité de l'inégalité du début de la question). En résumé, $H(X) = \ln(n)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \dfrac{1}{n}$ c'est-à-dire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Cas d'une variable aléatoire X réelle discrète infinie.

Q20. Soit $\alpha \in]0, 1[$. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \alpha(1-\alpha)^{n-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n |\ln(p_n)| = -\alpha(1-\alpha)^{n-1}\ln\left(\alpha(1-\alpha)^{n-1}\right) = -\alpha\ln(\alpha)(1-\alpha)^{n-1} - \alpha\ln(1-\alpha)(n-1)(1-\alpha)^{n-1}.$$

Puisque $1 - \alpha \in]0, 1[$, d'après un théorème de croissances comparées, $n^2 p_n |\ln(p_n)| \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ puis $p_n |\ln(p_n)| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série de terme général $-p_n\ln(p_n) = p_n|\ln(p_n)|$ converge puis que Y admet une entropie.

Déjà, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\alpha\ln(\alpha)(1-\alpha)^{n-1} = -\alpha\ln(\alpha) \times \frac{1}{1-(1-\alpha)} = -\ln(\alpha)$. Ensuite, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-1}$ puis, en dérivant,

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)x^{n-2}.$$

Mais alors, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\alpha\ln(1-\alpha)(n-1)(1-\alpha)^{n-1} = -\alpha(1-\alpha)\ln(1-\alpha)\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(1-\alpha)^{n-2} = -\frac{\alpha(1-\alpha)\ln(1-\alpha)}{(1-(1-\alpha))^2} = -\frac{(1-\alpha)\ln(1-\alpha)}{\alpha)}$. Finalement,

$$H(Y) = -\ln(\alpha) - \frac{(1-\alpha)\ln(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Q21. (a) X admet une espérance et donc la série de terme général np_n converge. En particulier, $np_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ puis $p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$\sqrt{p_n}\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

d'après un théorème de croissances comparées. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{p_n}\ln(p_n) = 0$ et en particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt{p_n}|\ln(p_n))| \leqslant 1$.

(b) Pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n|\ln(p_n)| = \sqrt{p_n} \times \sqrt{p_n}|\ln(p_n)| \leqslant \sqrt{p_n}$.
Si $p_n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$, alors $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{n^3}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Sinon, $p_n > \dfrac{1}{n^3}$ puis $0 \geqslant \ln(p_n) \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = -3\ln(n)$ puis
$|\ln(p_n)| \leqslant 3\ln(n)$ et finalement, $p_n|\ln(p_n)| \leqslant 3p_n\ln(n)$.

On a montré que, pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \mathrm{Max}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, 3p_n\ln(n)\right)$.

(c) On a encore pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + 3p_n\ln(n)$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$). D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées,

$$3p_n\ln(n) = np_n \times \frac{3\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} np_n o(1) \underset{n\to+\infty}{=} o(np_n).$$

Par hypothèse, la série de terme général np_n converge et il en est de même de la série de terme général $3p_n\ln(n)$. Ainsi, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + 3p_n\ln(n)$ converge et donc la série de terme général $p_n|\ln(p_n)|$ converge.

On a montré que si X admet une espérance, alors X admet une entropie.

Q22. (a) Y admet une entropie d'après la question **Q20**. Ensuite, par hypothèse $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\alpha} < +\infty$ et donc X admet une entropie d'après la question **Q21**. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(X)-\mathrm{H}(Y) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ln(p_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \ln(q_n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q_n \ln(q_n) - p_n \ln(p_n)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((q_n-p_n)\ln(q_n) + p_n \ln\left(\frac{q_n}{p_n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
(q_n-p_n)\ln(q_n) &= (q_n-p_n)\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha)^n\right)\\
&= \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(q_n-p_n) + \ln(1-\alpha)(nq_n - np_n).
\end{aligned}$$

Les séries de termes généraux respectifs $\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(q_n-p_n)$ et $\ln(1-\alpha)(nq_n-np_n)$ convergent et de plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(q_n-p_n) = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q_n - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-1) = 0.$$

D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-\alpha)(nq_n-np_n) = \ln(1-\alpha)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nq_n - \sum_{n=1}^{+\infty} np_n\right) = \ln(1-\alpha)(\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(X)) = 0.$$

Il reste $\mathrm{H}(X)-\mathrm{H}(Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ln\left(\frac{q_n}{p_n}\right)$.

(b) La fonction ln est concave et dérivable sur $]0,+\infty[$. D'après l'inégalité de Jensen,

$$\mathrm{H}(X)-\mathrm{H}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ln\left(\frac{q_n}{p_n}\right) \leqslant \ln\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \times \frac{q_n}{p_n}\right) = \ln\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q_n\right) = \ln(1) = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{H}(X) \leqslant \mathrm{H}(Y)$.

(c) Soit $y \in]0,+\infty[$. Pour $x \in]0,+\infty[$, posons $g(x) = f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = f'(x)-f'(y)$. Maintenant, la fonction f est concave sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction f' est décroissante sur $]0,+\infty[$. Mais alors, la fonction g' est positive sur $]0,y]$ et négative sur $[y,+\infty[$. La fonction g admet un maximum en y avec $g(y)=0$. La fonction g est donc négative sur $]0,+\infty[$ puis, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x)-f(y) \leqslant f'(y)(x-y)$.

Avec les notations de l'énoncé, posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} t_n p_n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} f(t_n)p_n - f\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n p_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f(t_n)p_n - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\right) f(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n (f(t_n) - f(S))\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} p_n f'(S)(t_n - S) = f'(S)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n t_n - S\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\right) = f'(S)(S-S)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

et donc, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(t_n)p_n \leqslant f\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n p_n\right)$.

