EPITA IPSA ESME

CONCOURS

CPGE

EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS POUR VOUS PRÉPARER À UNE MULTITUDE DE MÉTIERS

Samedi 11 avril 2026

OPTION MATHÉMATIQUES

MP

DURÉE : 2 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

Le sujet comporte 2 pages.

L'objectif de ce problème est de montrer que la fonction tangente est somme de sa série de Taylor au voisinage de 0, et de relier ce développement aux valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers strictement positifs pairs.

Dans la suite, I désigne l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f est la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$. On rappelle que f est de classe C^∞ sur I, et qu'elle vérifie la relation :

$$\forall x \in I, f'(x) = 1 + f(x)^2.$$

Partie I : préliminaires

1. (a) Soit $x \in I$. Exprimer les nombres $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$ en fonction seulement de $f(x)$.

   (b) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes à coefficients entiers naturels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n\left(f(x)\right).$$

   On précisera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3, et on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'entier naturel $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

   Montrer que $\alpha_1 = 1 + \alpha_0^2$, puis que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel p, $\alpha_{2p} = 0$. Préciser les valeurs de α_1, α_3 et α_5 et en déduire le développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Partie II : développement en série entière de f

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et S sa somme.

5. A l'aide de la question 2 et de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \leqslant f(x).$$

6. En déduire que $R \geqslant \frac{\pi}{2}$.

7. Montrer que $S(0) = 0$ et que pour tout $x \in I$, $S'(x) = S(x)^2 + 1$.

8. En considérant la fonction $x \mapsto \arctan(S(x))$, montrer que pour tout $x \in I$, $S(x) = f(x)$.

9. Déterminer la valeur de R.

10. **Application**

On considère la fonction g définie sur $]-2,2[$ par $g(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g est la fonction génératrice. Montrer que la loi de X est bien définie. Déterminer l'espérance de X.

Partie III : lien entre le développement en série entière de f et la fonction zêta

Dans la suite, on admet que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ln(\cos(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$$

11. A l'aide d'une dérivation terme à terme soigneusement justifiée, montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}.$$

12. En utilisant une série géométrique, montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+3}x^{2n+1}}{(2k+1)^{2n+2}\pi^{2(n+1)}}.$$

13. On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall s > 1, \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}\zeta(n).$$

14. En déduire que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(4^n - 1\right)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}.$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \dfrac{\pi^{2n}\alpha_{2n-1}}{2(2n-1)!\,(4^n - 1)}$.

16. En déduire les valeurs de $\zeta(2), \zeta(4)$ et $\zeta(6)$, puis montrer que $\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.