

**Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.  
Mathématiques. Option**

### Partie I : préliminaires

1) (a) Pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'(x) = 1 + f^2(x)$  puis

$$f^{(2)}(x) = 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 + f(x)^2) = 2f(x)^3 + 2f(x),$$

puis

$$f^{(3)}(x) = 6f'(x)f(x)^2 + 2f'(x) = 6(1 + f(x)^2)f(x)^2 + 2(1 + f(x)^2) = 6f(x)^4 + 8f(x)^2 + 2.$$

(b) Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  à coefficients entiers naturels tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $f^{(n)}(x) = P_n(f(x))$  ( $\mathcal{P}_n$ ).

• L'affirmation est vraie quand  $n = 0$  avec  $P_0 = X$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons ( $\mathcal{P}_n$ ). On a donc pour tout  $x \in I$ ,  $f^{(n)}(x) = P_n(f(x))$ . En dérivant, on obtient pour tout  $x \in I$ ,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = f'(x)P_n'(f(x)) = (1 + f(x)^2)P_n'(f(x)).$$

Si on pose  $P_{n+1} = (1 + X^2)P_n'$ ,  $P_{n+1}$  est un polynôme à coefficients entiers naturels tels que pour tout  $x \in I$ ,  $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(f(x))$ .

Le résultat est démontré par récurrence. On note que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(y) = f^{(n)}(\text{Arctan}(y))$  et donc  $P_n$  est uniquement défini.

D'après ce qui précède,  $P_0 = X$ ,  $P_1 = X^2 + 1$ ,  $P_2 = 2X^3 + 2X$  et  $P_3 = 6X^4 + 8X^2 + 2$  puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1} = (1 + X^2)P_n'$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . Alors  $\tan(x) \geq 0$  puis  $f^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)) \geq 0$  car  $P_n$  est à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .

3)  $\alpha_0 = P_0(0) = 0$ .  $\alpha_1 = P_1(0) = 1$ . Soit  $n \geq 1$ . On a  $f' = 1 + f^2$  puis  $f^{(n+1)} = (f')^{(n)} = (1 + f^2)^{(n)} = (f^2)^{(n)}$  car  $n \geq 1$ . Ensuite, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$

On évalue les deux membres de cette égalité en 0 et on obtient

$$\alpha_{n+1} = f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

4) La fonction  $f$  est impaire et donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(2p)}$  est impaire (et  $f^{(2p+1)}$  est paire). Par suite, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{2p} = f^{(2p)}(0) = 0$ . Ensuite,  $\alpha_1 = 1$  puis

$$\alpha_3 = \binom{2}{0} \alpha_0 \alpha_2 + \binom{2}{1} \alpha_1^2 + \binom{2}{2} \alpha_2 \alpha_0 = 2$$

puis  $\alpha_4 = 0$  puis

$$\alpha_5 = \alpha_0 \alpha_4 + 4\alpha_1 \alpha_3 + 6\alpha_2^2 + 4\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_4 \alpha_0 = 2 \times 4 \times 2 \times 1 = 16.$$

La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et admet en particulier un développement limité d'ordre 5 en 0, son développement de TAYLOR-YOUNG :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} \alpha_1 x + \frac{\alpha_3}{3!} x^3 + \frac{\alpha_5}{5!} x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{2}{6} x^3 + \frac{16}{120} x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5). \end{aligned}$$

## Partie II : développement en série entière de f

5) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . La fonction est de classe  $C^{n+1}$  sur  $[0, x]$ . D'après la formule de TAYLOR avec reste intégral,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $\frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$  et d'autre part  $f^{(n+1)}(t) \geq 0$  d'après la question 2). Donc, pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \geq 0$  puis par positivité de l'intégration (et en tenant compte de  $x \geq 0$ ),  $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$ .

Mais alors,  $f(x) \geq \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} x^k$ . On a montré que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} x^k \leq f(x).$$

6) On sait que  $R = \text{Sup} \left\{ r \in [0, +\infty[ / \left( \frac{\alpha_n}{n!} r^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$ .

Soit  $r \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \frac{\alpha_n}{n!} r^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} r^k \leq f(r)$ . Ainsi, pour tout  $r \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , la suite  $\left( \frac{\alpha_n}{n!} r^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et donc  $R \geq \frac{\pi}{2}$ .

7) Puisque  $R \geq \frac{\pi}{2}$ , la fonction S est bien définie sur I et pour tout  $x \in I$ ,  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ .

$S(0) = \alpha_0 = 0$  puis pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n \text{ (d'après la question 3)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n \text{ (car } \alpha_0 = 0) \\ &= 1 + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \right)^2 \text{ (produit de CAUCHY de séries entières à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence)} \\ &= 1 + S(x)^2. \end{aligned}$$

8) Pour tout  $x \in I$ , posons  $g(x) = \text{Arctan}(S(x))$ . La fonction S est dérivable sur I et pour tout  $x \in I$ ,

$$g'(x) = \frac{S'(x)}{1 + S(x)^2} = 1.$$

Donc, pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) = g(0) + x = x$ . Ainsi, pour tout  $x \in I$ ,  $\text{Arctan}(S(x)) = x$  puis  $S(x) = \tan(x) = f(x)$ .

9) On sait déjà que  $R \geq \frac{\pi}{2}$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ . Mais alors,  $R \leq \frac{\pi}{2}$  puis  $R = \frac{\pi}{2}$ .

10) **Application** Pour tout  $x \in ]-2, 2[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n = g(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n x^n$ .

Puisque la fonction g est dérivable en 1, on sait que X admet une espérance et de plus,  $\mathbb{E}(X) = g'(1)$ . Or, pour tout  $x \in ]-2, 2[$ ,  $g'(x) = \frac{\pi}{4} \left( 1 + \tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)$  et donc

$$\mathbb{E}(X) = g'(1) = \frac{\pi}{2}.$$

### Partie III : lien entre le développement en série entière de $f$ et la fonction zêta

11) Pour tout  $x \in I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , posons  $h(x) = \ln(\cos(x))$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $h_k(x) = \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$ .

- la série de fonctions de terme général  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , converge simplement vers la fonction  $h - h_0$  sur  $I$ .
- chaque fonction  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , est dérivable sur  $I$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in I$ ,

$$h'_k(x) = -\frac{8x}{((2k+1)^2\pi^2)} \times \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}} = -\frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}.$$

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in I$ ,  $(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2 \geq (2k+1)^2\pi^2 - \pi^2 > 0$  et donc

$$|h'_k(x)| = \frac{8|x|}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2} \leq \frac{4\pi}{(2k+1)^2\pi^2 - \pi^2} = \frac{1}{k(k+1)\pi},$$

puis, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|h'_k\|_\infty \leq \frac{1}{k(k+1)\pi}$ . La série numérique de terme général  $\frac{1}{k(k+1)\pi}$  converge car  $\frac{1}{k(k+1)\pi}$  est dominé par  $\frac{1}{k^2}$  en  $+\infty$ . Donc, la série de fonctions de terme général  $h'_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , converge normalement et en particulier uniformément sur  $I$ .

D'après le théorème de dérivation terme,  $\sum_{k=1}^{+\infty} h_k$  est dérivable sur  $I$  et de plus,  $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} h_k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} h'_k$ . D'autre part, la fonction  $h - h_0$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $(h - h_0)'(x) = -\tan(x) - h'_0(x) = -f(x) - h'_0(x)$ . Ainsi, pour tout  $x \in I$ ,  $-f(x) - h'_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} h'_k(x)$  puis

$$f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} h'_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}.$$

12) Soit  $x \in I$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\left|\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right| = \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2} \leq \frac{4x^2}{\pi^2} < 1$  et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2} \times \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2} \left(\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+3}x^{2n+1}}{(2k+1)^{2n+2}\pi^{2n}} \end{aligned}$$

13) Soit  $n \geq 2$ .  $\zeta(n) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^n} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{1}{2^n}\zeta(n) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}$  et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\zeta(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}\zeta(n).$$

14) Soit  $x \in I$ . Pour tout  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $u_{k,n} = \frac{2^{2n+3}x^{2n+1}}{(2k+1)^{2n+2}\pi^{2n}}$ . Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+3}|x|^{2n+1}}{(2k+1)^{2n+2}\pi^{2n}} = f(|x|) < +\infty$$

la famille  $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable. Le théorème de sommation par paquets permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+3} x^{2n+1}}{(2k+1)^{2n+2} \pi^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+3} x^{2n+1}}{\pi^{2n+2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+3} x^{2n+1}}{\pi^{2n+2}} \frac{2^{2n+2} - 1}{2^{2n+2}} \zeta(2n+2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(4^{n+1} - 1)}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2) x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(4^n - 1)}{\pi^{2n}} \zeta(2n) x^{2n-1}
\end{aligned}$$

15) On a aussi, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n-1}}{(2x-1)!} x^{2n-1}$ . Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit

que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{2(4^n - 1)}{\pi^{2n}} \zeta(2n) = \frac{\alpha_{2n-1}}{(2n-1)!}$  puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \zeta(2n) = \frac{\pi^{2n} \alpha_{2n-1}}{2(2n-1)! (4^n - 1)}.$$

16)  $\zeta(2) = \frac{\pi^2 \alpha_1}{2 \times 1 \times 3} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4 \alpha_3}{2 \times 6 \times 15} = \frac{\pi^4}{6 \times 15} = \frac{\pi^4}{90}$  puis

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6 \alpha_5}{2 \times 5! \times 63} = \frac{16\pi^6 \alpha_5}{2 \times 5! \times 63} = \frac{\pi^6}{5 \times 3 \times 63} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_{2n-1} = P_{2n-1}(0) \in \mathbb{N}$  et donc,  $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} = \frac{\alpha_{2n-1}}{2(2n-1)! (4^n - 1)} \in \mathbb{Q}$ .