



Samedi 6 avril 2024

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
MP - MPI - PC - PSI

DURÉE : 3 HEURES

Conditions particulières :
Calculatrice et documents interdites

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2024

Épreuve de Mathématiques MPI – MP – PSI – PC

Exponentielle de matrices

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices et à son lien avec la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans \mathbb{K} .
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.
- On identifiera les vecteurs de \mathbb{K}^n avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{K} et à valeurs dans \mathbb{K} .

1 Exemples de systèmes différentiels

On considère dans cette partie et dans la partie 4 uniquement les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX_1 , AX_2 et AX_3 .
2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P_A D P_A^{-1}$.
3. Déterminer P_A^{-1} .
4. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = DX(t)$.
5. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.
6. Montrer que $\chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$.
7. B est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? Est-elle trigonalisable sur \mathbb{R} ? On justifiera sa réponse.
8. Déterminer $P_B \in GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B = P_B T P_B^{-1}$.
9. Résoudre le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = TX(t)$.
10. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = BX(t)$.

2 Exponentielle de matrices : convergence et propriétés

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son coefficient en ligne i et colonne j sera noté $(A)_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |A_{i,j}|$.

On définit pour tout entier naturel k le polynôme $E_k = \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} X^p$.

On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $\left(\sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} A^p \right)_{k \in \mathbb{N}}$.

11. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

12. Montrer par récurrence que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\|A^p\|_\infty \leq n^{p-1} \|A\|_\infty^p$.

13. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(E_k(A))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

14. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

15. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PBP^{-1}$. Montrer que $e^A = Pe^BP^{-1}$.

16. En reprenant la matrice A de la partie 1, déterminer e^A .

17. Soit A et soit B deux matrices qui commutent.

On pose $\forall N \in \mathbb{N}$, $\Delta_N = \left(\sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} B^j \right) - \sum_{k=0}^N \frac{(A+B)^k}{k!}$.

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\Delta_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j$ et en déduire que $e^{A+B} = e^A e^B$.

18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^A est inversible et déterminer son inverse.

3 Calcul avec les polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ par : $L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$

On définit alors \tilde{L}_f le **polynôme interpolateur de Lagrange** de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ par :

$$\tilde{L}_f(X) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) L_i(X)$$

\tilde{L}_e sera donc le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction exponentielle sur \mathbb{C} aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

19. Montrer que (L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

20. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $P(X) = \tilde{L}_P(X)$.

21. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists R_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $E_k(A) = R_k(A)$.

22. Montrer que e^A est un polynôme en A .

23. Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$.

Montrer que $\forall Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(M) = PQ(N)P^{-1}$.

24. Soit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = P^{-1}\tilde{L}_e(A)P$.

25. En déduire que $e^A = \tilde{L}_e(A)$.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X' = MX \Leftrightarrow X \in \{t \mapsto e^{tM}X_0 \mid X_0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Dans cette partie on considère à nouveau les matrices A , B et T telles que définies **dans la partie 1**.

26. $E = \{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est-il un \mathbb{R} -espace vectoriel ?

27. En utilisant la question 25, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, e^{tA} = \frac{1}{6} (-3e^t(A + I_3)(A - 2I_3) + e^{-t}(A - I_3)(A - 2I_3) + 2e^{2t}(A + I_3)(A - I_3))$$

28. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} + e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^{-t} & e^t - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.

29. Retrouver la réponse à la question 5.

30. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tT} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

31. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t + (1 - 2t)e^{2t} & te^{2t} & e^t - (t + 1)e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ (2t - 1)e^{2t} & -te^{2t} & (t + 1)e^{2t} \end{pmatrix}$.

32. Retrouver la réponse à la question 10.

Fin du sujet