Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques

---

1 Exemples de systèmes différentiels

1) $AX_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1$, $AX_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_2$ et $AX_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_3$.

2) Soit $P_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient $\det(P_A) = 1 \times 1 - 1 \times 0 = 1$. $\det(P_A) \neq 0$ et donc $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, $A = P_A D P_A^{-1}$ où $D = \text{diag}(1, -1, 2)$.

3) Notons $\mathscr{B}_0 = (E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis $\mathscr{B} = (X_1, X_2, X_3)$. Par définition, $P_A = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$ et donc $P_A^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$.

$$\left\{\begin{array}{l} E_1 + E_2 = X_1 \\ E_1 - E_3 = X_2 \\ E_1 + E_2 - E_3 = X_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_2 = -E_1 + X_1 \\ E_3 = E_1 - X_2 \\ E_1 + (-E_1 + X_1) - (E_1 - X_2) = X_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_1 = X_1 + X_2 - X_3 \\ E_2 = -(X_1 + X_2 - X_3) + X_1 \\ E_3 = (X_1 + X_2 - X_3) - X_2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_1 = X_1 + X_2 - X_3 \\ E_2 = -X_2 + X_3 \\ E_3 = X_1 - X_3 \end{array}\right.$$

Donc, $P_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X' = DX \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -y(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^t \\ y'(t) = c_2 e^{-t} \\ z'(t) = c_3 e^{2t} \end{array}\right.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = DX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$, $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.

5) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = P_A D P_A^{-1} X \Leftrightarrow P_A^{-1} X' = D P_A^{-1} X \Leftrightarrow \left(P_A^{-1} X\right)' = D\left(P_A^{-1} X\right) \\ &\Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R},\ P_A^{-1} X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P_A \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ c_1 e^t + c_3 e^{2t} \\ -c_2 e^{-t} - c_3 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Autre solution : on sait directement d'après le cours que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto c_1e^tX_1 + c_2e^{-t}X_2 + c_3e^{2t}X_3$ où $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$).

Soit alors X une telle fonction. $X(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \\ -c_2 - c_3 \end{pmatrix}$ puis

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ -c_2 - c_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -c_3 \\ c_2 = -c_3 \\ -c_3 - c_3 + c_3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_3 = -1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}\right.$$

La solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = AX$ telle que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} \\ -e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$.

6) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_B = \det(XI_3 - B) = \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} &= X\left(X^2 - 5X + 5\right) - (-X + 1) - (-2X + 3) \\ &= X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)\left(X^2 - 4X + 4\right) = (X-1)(X-2)^2.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Sp}(B) = (1, 2, 2)$.

7) La matrice B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ si et seulement si (χ_B est scindé sur $\mathbb{C}$) et l'ordre de multiplicité de chacune de ses valeurs propres est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. De plus, la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours égale à 1.

Donc, B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(B - 2I_3)) = 2$ ce qui équivaut à $\mathrm{rg}(B - 2I_3) = 1$ d'après le théorème du rang. Mais, les deux premières colonnes de $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires et donc $\mathrm{rg}(B - 2I_3) \neq 1$. On en déduit que la matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Par contre, χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc la matrice B est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

8) • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(B) \Leftrightarrow (B - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = x \end{array}\right. .$$

$E_1(B) = \mathrm{Vect}(X_1)$ où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_2(B) \Leftrightarrow (B - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x + y - 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x \\ y = 0 \end{array}\right. .$$

$E_2(B) = \mathrm{Vect}(X_2)$ où $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = X_2 + 2X \Leftrightarrow (B - 2I_3)X = X_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x + y - 2z = 1 \\ -x - z = 0 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -x \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient puis la matrice $P_B = P_A$ est une matrice inversible telle que $B = P_B T P_B^{-1}$.

9) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X' = TX \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists\,(c_1, c_3) \in \mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^t \\ z(t) = c_3 e^{2t} \\ y'(t) = 2y(t) + c_3 e^{2t} \end{array}\right.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = 2y(t) + c_3 e^{2t} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 2y(t) = c_3 e^{2t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-2t}y'(t) - 2e^{-2t}y(t) = c_3 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left(e^{-2t}y\right)'(t) = c_3 \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-2t}y(t) = c_3 t + c_2 \\ &\Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}. \end{aligned}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ du système $X' = TX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$, $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.

10) Comme à la question 5,

$$\begin{aligned} X' = BX &\Leftrightarrow \left(P_B^{-1}X\right)' = T\left(P_B^{-1}X\right) \\ &\Leftrightarrow \exists\,(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3/\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists\,(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3/\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3(t+1)e^{2t} \\ c_1 e^t + c_3 e^{2t} \\ -c_2 e^{2t} - c_3(t+1)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \\ -c_2 - c_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_3 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array}\right.$.

La solution demandée est la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{2t} + (t+1)e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} - (t+1)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}$.

2 Exponentielle de matrices : convergence et propriétés

11) Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$|(AB)_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}|\,|B_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|(AB)_{i,j}| \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. En particulier, $\|AB\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |A_{i,j}| \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

On a montré que $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

12) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|A^p\|_\infty \leqslant n^{p-1}\|A\|_\infty^p$.

- L'inégalité est vraie quand $p = 1$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $\|A^p\|_\infty \leqslant n^{p-1}\|A\|_\infty^p$. Alors,

$$\begin{aligned}\left\|A^{p+1}\right\|_\infty &= \|A \times A^p\|_\infty \\ &\leqslant n\|A\|_\infty \times \|A^p\|_\infty \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\leqslant n\|A\|_\infty \times n^{p-1}\|A\|_\infty^p \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= n^{(p+1)-1}\|A\|_\infty^{p+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

13) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\dfrac{1}{k!}A^k\right\|_\infty = \dfrac{1}{k!}\left\|A^k\right\|_\infty \leqslant \dfrac{n^{k-1}\|A\|_\infty^k}{k!} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}$. La série numérique de terme général $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge (et a pour somme $\dfrac{1}{n}\left(e^{n\|A\|_\infty} - 1\right)$). Donc, la série de terme général $\left\|\dfrac{1}{k!}A^k\right\|_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, converge ou encore la série matricielle de terme général $\dfrac{1}{k!}A^k$, $k \in \mathbb{N}$, converge absolument.

Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, on en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{k!}A^k$, $k \in \mathbb{N}$, converge ou encore que la suite $(E_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On note e^A la limite de cette suite.

14) Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On sait que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$E_k(D) = \mathrm{diag}\left(E_k(\lambda_1), \ldots, E_k(\lambda_n)\right).$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(E_k(\lambda_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{λ_i} et donc, la suite $(E_k(D))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$ ou encore $e^D = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$.

15) Soient $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PBP^{-1}$. On sait que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PB^pP^{-1}$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$E_k(A) = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{k!}PB^kP^{-1} = P\left(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{k!}B^k\right)P^{-1} = PE_k(B)P^{-1}.$$

Maintenant, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et à ce titre, est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On en déduit

$$e^A = \lim_{k\to+\infty} E_k(A) = \lim_{k\to+\infty} PE_k(B)P^{-1} = \lim_{k\to+\infty} f\left(E_k(B)\right) = f\left(\lim_{k\to+\infty} E_k(B)\right) = Pe^BP^{-1}.$$

16) $A = P_ADP_A^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, -1, 2)$, $P_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (d'après la question 3).

Donc, d'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned} e^A = P_Ae^DP_A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{e} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & \dfrac{1}{e} & e^2 \\ e & 0 & e^2 \\ 0 & -\dfrac{1}{e} & -e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -e^3 + e^2 + 1 & e^3 - 1 & e^2 - e^3 \\ e^2 - e^3 & e^3 & e^2 - e^3 \\ -1 + e^3 & 1 - e^3 & e^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

17) Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $AB = BA$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Puisque les matrices A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\frac{1}{k!}(A + B)^k = \sum_{\substack{i+j=k \\ (i,j)\in[\![0,k]\!]^2}} \frac{1}{k!}\binom{k}{i}A^iB^j = \sum_{\substack{i+j=k \\ (i,j)\in[\![0,k]\!]^2}} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\Delta_N &= \left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N}B^j\right)-\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j-\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\(i,j)\in[\![0,k]\!]^2}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j\right)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j-\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2\\i+j\leqslant N}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2\\N+1\leqslant i+j\leqslant 2N}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\|E_N(A)E_N(B)-E_N(A+B)\|_\infty = \|\Delta_N\|_\infty &\leqslant \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2\\N+1\leqslant i+j\leqslant 2N}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\left\|A^iB^j\right\|_\infty\\ &\leqslant \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2\\N+1\leqslant i+j\leqslant 2N}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}n^{i-1}\|A\|_\infty^i n^{j-1}\|B\|_\infty^j \text{ (car dans cette somme, } i\geqslant 1 \text{ et } j\geqslant 1)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,N]\!]^2\\N+1\leqslant i+j\leqslant 2N}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\left(\|nA\|_\infty\right)^i\left(\|nB\|_\infty\right)^j\\ &= \frac{1}{n^2}\left(\left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}\|nA\|_\infty^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}\|nB\|_\infty^j\right)-\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\|nA\|_\infty+\|nB\|_\infty\right)^k\right)\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers $\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\|nA\|_\infty}\times e^{\|nB\|_\infty}-e^{\|nA\|_\infty+\|nB\|_\infty}\right)$, c'est-à-dire 0, quand N tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\|E_N(A)E_N(B)-E_N(A+B)\|_\infty$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ ou encore la suite matricielle $(E_N(A)E_N(B)-E_N(A+B))_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_n quand N tend vers $+\infty$. D'autre part, par continuité de l'application $\begin{array}{ccc}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\\ (M_1,M_2) & \mapsto & M_1M_2\end{array}$, quand N tend vers $+\infty$, $E_N(A)E_N(B)-E_N(A+B)$ tend vers $e^Ae^B-e^{A+B}$ et donc $e^Ae^B-e^{A+B}=0_n$ ou encore $e^Ae^B=e^{A+B}$.

18) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque les matrices A et $-A$ commutent,

$$e^A\times e^{-A}=e^{A-A}=e^{0_n}=e^{\mathrm{diag}(0,\dots,0)}=\mathrm{diag}\left(e^0,\ \dots,e^0\right)=I_n.$$

Donc, $e^A\in GL_n(\mathbb{C})$ et $\left(e^A\right)^{-1}=e^{-A}$.

3 Calcul avec les polynômes interpolateurs de Lagrange

19) Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, L_i est un polynôme unitaire de degré $n-1$ et en particulier, $L_i\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $L_i(\lambda_j)=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } j=i\\ 0 \text{ si } j\neq i\end{array}\right.=\delta_{i,j}$.

Soit alors $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_iL_i=0 &\Rightarrow \forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_iL_i(\alpha_j)=0\Rightarrow \forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{i,j}=0\\ &\Rightarrow \forall j\in[\![1,n]\!],\ \alpha_j=0.\end{aligned}$$

La famille $(L_1,\dots,L_n)$ est donc une famille libre de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Enfin, $\mathrm{card}\,(L_1,\dots,L_n)=n=\dim\left(\mathbb{C}_{n-1}[X]\right)<+\infty$ et donc la famille $(L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

20) Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\widetilde{L}_P(\lambda_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} P(\lambda_i) L_i(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{N} P(\lambda_i)\delta_{i,j} = P(\lambda_j)$. Ainsi, P et $\widetilde{L}_P$ sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et prenant la même valeur en au moins n nombres complexes deux à deux distincts. On en déduit que $P = \widetilde{L}_P$.

21) Soit $k \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de E_k par χ_A s'écrit $E_k = Q_k\chi_A + R_k$ où $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_n$ et donc en évaluant en A,

$$E_k(A) = Q_k(A)\chi_A(A) + R_k(A) = R_k(A).$$

22) Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_k(A) \in \text{Vect}\left(I_n, A, \dots, A^{n-1}\right) = F$. F est un sous-espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donc un fermé de cet espace. La suite $(R_k(A))_{k\in\mathbb{N}} = (E_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F qui converge vers e^A. Puisque F est fermée, $e^A \in F$ ou encore e^A est un polynôme en A.

23) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Posons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.

$$Q(M) = Q\left(PNP^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(PNP^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{p} a_k PN^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{p} a_k N^k\right)P^{-1} = PQ(N)P^{-1}.$$

24) On note d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_k(\lambda_i) = Q_k(\lambda_i)\chi_A(\lambda_i) + R_k(\lambda_i) = R_k(\lambda_i)$. Avec les résultats des questions précédentes, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}E_k(D) &= E_k\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}E_k(A)P = P^{-1}R_k(A)P = P^{-1}\widetilde{L}_{R_k}(A)P \\ &= P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} R_k(\lambda_i) L_i(A)\right)P = P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E_k(\lambda_i) L_i(A)\right)P.\end{aligned}$$

Quand k tend vers $+\infty$, on obtient $e^D = P^{-1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} L_i(A)\right)P$ (par continuité de l'application $M \mapsto P^{-1}MP$) ou encore $e^D = P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P$ où e désigne la fonction exponentielle.

25) Mais alors, d'après la question 15), $e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1} = \widetilde{L}_e(A)$.

4 Résolution d'un système homogène

26) Pour tout réel t, e^{tA} est une matrice inversible d'après la question 18. Donc, $0_n \notin E$. On en déduit que E n'est pas un espace vectoriel.

27) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Les valeurs propres de la matrice tA sont $t \times 1 = t$, $t \times (-1) = -t$ et $t \times 2 = 2t$. Puisque $t \neq 0$, ces valeurs propres sont deux à deux distinctes puis

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_e(X) &= e^t \frac{1}{(t-(-t))(t-2t)}(X-(-t))(X-2t) + e^{-t}\frac{1}{(-t-t)(-t-2t)}(X-t)(X-2t) \\ &\quad + e^{2t}\frac{1}{(2t-t)(2t-(-t))}(X-t)(X-(-t)) \\ &= \frac{1}{6t^2}\left(-3e^t(X+t)(X-2t) + e^{-t}(X-t)(X-2t) + 2e^{2t}(X-t)(X+t)\right).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}e^{tA} &= \widetilde{L}_e(tA) \\ &= \frac{1}{6t^2}\left(-3e^t\left(tA+tI_3\right)\left(tA-2tI_3\right) + e^{-t}\left(tA-tI_3\right)\left(tA-2tI_3\right) + 2e^{2t}\left(tA-tI_3\right)\left(tA+tI_3\right)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(-3e^t\left(A+I_3\right)\left(A-2I_3\right) + e^{-t}\left(A-I_3\right)\left(A-2I_3\right) + 2e^{2t}\left(A-I_3\right)\left(A+I_3\right)\right).\end{aligned}$$

28) $(A+I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&3&-1\\3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&-1\\-1&0&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$(A-I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-1&1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&-1\\-1&0&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&0\\0&0&0\\-6&6&0\end{pmatrix}$ et

$(A+I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&3&-1\\3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-1&1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$ puis, pour $t\in\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}e^{tA}&=\frac{1}{6}\left(-3e^t(A+I_3)(A-2I_3)+e^{-t}(A-I_3)(A-2I_3)+2e^{2t}(A-I_3)(A+I_3)\right)\\&=\frac{1}{6}\left(-3e^t\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}6&-6&0\\0&0&0\\-6&6&0\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}\right)\\&=e^t\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e^{-t}+e^t-e^{2t}&e^{2t}-e^{-t}&e^t-e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\e^{2t}-e^{-t}&e^{-t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

cette dernière égalité reste vraie quand $t=0$ car $e^{0A}=I_3$ et donc, $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{tA}=\begin{pmatrix}e^{-t}+e^t-e^{2t}&e^{2t}-e^{-t}&e^t-e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\e^{2t}-e^{-t}&e^{-t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}$.

29) La solution X du système $X'=AX$ où de plus $X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est la fonction $X\ :\ t\mapsto e^{tA}X_0$ où de plus $X_0=X(0)$.

Plus explicitement,

$$\forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}+e^t-e^{2t}&e^{2t}-e^{-t}&e^t-e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\e^{2t}-e^{-t}&e^{-t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}+e^t-e^{2t}\\e^t-e^{2t}\\e^{2t}-e^{-t}\end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 5.

30) Soit $t\in\mathbb{R}$. En posant $N=E_{2,3}$ de sorte que $T=D+N$ avec $D=\mathrm{diag}(1,2,2)$, $ND=DN$ et $N^2=0$, on obtient

$$\begin{aligned}e^{tT}&=e^{tD+tN}=e^{tD}\times e^{tN}\ \text{(car les matrices } tD \text{ et } tN \text{ commutent)}\\&=\mathrm{diag}\left(e^t,e^{2t},e^{2t}\right)(I_3+tN)=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

31) Mais alors, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}e^{tB}&=e^{P_A(tT)P_A^{-1}}=P_Ae^{tT}P_A^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e^t&e^{2t}&(t+1)e^{2t}\\e^t&0&e^{2t}\\0&-e^{2t}&-(t+1)e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t-te^{2t}&te^{2t}&e^t-(t+1)e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\te^{2t}&-te^{2t}&(t+1)e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

32) On retrouve alors la solution du système $X' = BX$ vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obtenue à la question 10 : pour tout réel t,

$$X(t) = e^{tB}X(0) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}.$$

