Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées. Mathématiques. Option

---

1) *Un premier exemple de transformée de Fourier*

a) Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $g\ :\ u \mapsto e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel $u > 0$,

$$u^2|g(u)| = u^2 e^{-\pi u^2} = e^{-\pi u^2 + 2\ln(u)}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $-\pi u^2 + 2\ln(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} -\pi u^2$ puis $\lim\limits_{u\to+\infty} -\pi u^2 + 2\ln(u) = -\infty$ et donc $u^2 g(u) \underset{u\to+\infty}{=} o(1)$. On en déduit que $g(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. Puisque $2 > 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction g.

De même, $g(u) \underset{u\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ et donc la fonction g est intégrable sur un voisinage de $-\infty$.

Finalement, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $F(t)$ dans $\mathbb{C}$. On a ainsi montré que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit alors $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (t,u) & \mapsto & e^{-\pi u^2}e^{2i\pi tu} \end{array}$ de sorte que, pour tout réel t, $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,u)\ du$.

- D'après le début de la question, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto \Phi(t,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction Φ admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable t définie par :

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,u) = -2i\pi u\, e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}.$$

De plus,

- Pour tout réel t, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout réel u, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t,u)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout $(u,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t,u)\right| = 2\pi|u|e^{-\pi u^2} \leqslant 2\pi|u|e^{-\pi u^2} = \varphi(u)$ où de plus, la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,u)\ du = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi u\, e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}\ du.$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $u \mapsto e^{-\pi u^2}$ et $u \mapsto e^{-2i\pi tu}$ sont de classe C^1 sur le segment $[-A, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} -2i\pi u e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}\ du &= i\left(\left[e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}\right]_{u=-A}^{u=A} - \int_{-A}^{A} e^{-\pi u^2} \times (-2i\pi t)e^{-2i\pi tu}\ du\right) \\ &= i\left(e^{-\pi A^2}e^{-2i\pi tA} - e^{-\pi A^2}e^{2i\pi tA}\right) - 2\pi t\int_{-A}^{A} e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}\ du.\end{aligned}$$

$\left|i\left(e^{-\pi A^2}e^{-2i\pi tA} - e^{-\pi A^2}e^{2i\pi tA}\right)\right| \leqslant \left|e^{-\pi A^2}e^{-2i\pi tA}\right| + \left|e^{-\pi A^2}e^{2i\pi tA}\right| = 2e^{-\pi A^2}$ et donc,
$\lim\limits_{A\to+\infty} i\left(e^{-\pi A^2}e^{-2i\pi tA} - e^{-\pi A^2}e^{2i\pi tA}\right) = 0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$F'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi u e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}\ du = -2\pi t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}e^{-2i\pi tu}\ du = -2\pi t F(t).$$

On a montré que pour tout réel t, $F'(t) = -2\pi t F(t)$.

c)

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ F'(t) = -2\pi t F(t) &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ F'(t) + 2\pi t F(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{\pi t^2} F'(t) + 2\pi t e^{\pi t^2} F(t) = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left(e^{\pi t^2} F\right)'(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\pi t^2} F(t) = e^0 F(0) \\ &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = e^{-\pi t^2} \text{ (d'après le résultat admis par l'énoncé).}\end{aligned}$$

On a montré que pour tout réel t, $Tf(t) = e^{-\pi t^2}$.

2) *Un second exemple de transformée de Fourier*

a) Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$. Pour $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A e^{-au}\ du = \left[-\frac{1}{a} e^{-au}\right]_0^A = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-aA}\right)$. De plus, pour tout $A > 0$, $\left|e^{-aA}\right| = e^{-\mathrm{Re}(a)A}$. Puisque $\mathrm{Re}(a) > 0$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-\mathrm{Re}(a)A} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-aA} = 0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-au}\ du = \frac{1}{a}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto g_n(u) e^{-2i\pi tu}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}Tg_n(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi|u|}{n}} e^{-2i\pi tu}\ du = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{2\pi u}{n}} e^{-2i\pi tu}\ du + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2\pi u}{n}} e^{-2i\pi tu}\ du \\ &= \int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{2\pi v}{n}} e^{2i\pi tv}\ (-dv) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2\pi u}{n}} e^{-2i\pi tu}\ du = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{2\pi}{n} - 2i\pi t\right)u}\ du + \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{2\pi}{n} + 2i\pi t\right)u}\ du \\ &= \frac{1}{\frac{2\pi}{n} - 2i\pi t} + \frac{1}{\frac{2\pi}{n} + 2i\pi t} \text{ (car } \mathrm{Re}\left(\frac{2\pi}{n} + 2i\pi t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2\pi}{n} - 2i\pi t\right) = \frac{2\pi}{n} > 0\text{)} \\ &= \frac{\frac{4\pi}{n}}{\frac{4\pi^2}{n^2} + 4\pi^2 t^2} = \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Tg_n(t) = \dfrac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)}$. En particulier, Tg_n est à valeurs positives.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout réel $t \in]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$,

$$\left|\frac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)}\right| = \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)} \leqslant \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 \alpha^2\right)},$$

puis $\displaystyle\sup_{|t| \geqslant \alpha} Tg_n(t) \leqslant \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 \alpha^2\right)}$. Puisque $\displaystyle\frac{n}{\pi\left(1 + n^2 \alpha^2\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n\alpha^2}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty}\left(\sup_{|t| \geqslant \alpha} Tg_n(t)\right) = 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Tg_n(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arctan}(nt)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$. Soit $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{|t| \geqslant \alpha} Tg_n(t)\ dt &= \int_{|t| \geqslant \alpha} Tg_n(t)\ dt = \int_{|t| \geqslant \alpha} \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)}\ dt = 2\int_\alpha^{+\infty} \frac{n}{\pi\left(1 + n^2 t^2\right)}\ dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\mathrm{Arctan}(nt)\right]_\alpha^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(n\alpha)\right).\end{aligned}$$

Mais alors, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geqslant \alpha} Tg_n(t)\ dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3) *Premières propriétés de la transformation de Fourier*

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (t,u) & \mapsto & f(u)e^{-2i\pi tu} \end{array}$ de sorte que pour tout réel t, $Tf(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,u)\ du$.

- Pour tout réel t, la fonction $u \mapsto \Phi(t,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout réel u, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout $(u,t) \in \mathbb{R}^2$, $|\Phi(t,u)| = |f(u) = \varphi(u)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction Tf est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t, $|Tf(t)| = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi tu}\ du\right| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(u)e^{-2i\pi tu}\right|\ du = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\ du = \|f\|_1$. En particulier, la fonction Tf est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, la fonction Tf est continue sur $]-\infty, x]$ et donc la fonction $Tf \times g$ est continue sur $]-\infty, x]$. De plus, pour tout réel t, $|Tf(t)g(t)| = |Tf(t)||g(t)| \leqslant \|f\|_1|g(t)|$. Puisque la fonction $t \mapsto \|f\|_1|g(t)|$ est intégrable sur un voisinage de $-\infty$, il en est de même de la fonction $T(f) \times g$. Ceci montre l'existence de $A(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque g est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par une démonstration analogue à celle de la question a). Il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du$. De plus, pour tout réel t de $]-\infty, x]$,

$$\left|f(t)\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du\right| \leqslant |f(t)|\int_{-\infty}^{x} |g(u)|\ du \leqslant |f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\ du = \|g\|_1|f(t)|.$$

La fonction $t \mapsto \|g\|_1|f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $t \mapsto f(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $B(x)$.

Ainsi, les fonctions A et B sont définies sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction $Tf \times g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $A : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} Tf(t)g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} Tf(t)g(t)\ dt + \int_{0}^{x} Tf(t)g(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $A'(x) = Tf(x)g(x)$.

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $B(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,t)\ dt$.

• D'après la question b), pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (car entre autre, g est continue sur $\mathbb{R}$), de dérivée la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi tx}g(x)$. Donc, la fonction Φ admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = f(t)e^{-2i\pi tx}g(x).$$

De plus,

- Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel t, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = |f(t)||g(x)| \leqslant \|g\|_\infty|f(t)| = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction B est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi tx}g(x)\ dt = g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi tx}\ dt = Tf(x)g(x).$$

d) Puisque $\int_{-\infty}^{0} Tf(t)g(t)\ dt$ est une intégrale convergente, $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} Tf(t)g(t)\ dt = 0$.
Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)g(t)\ dt$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)g(t)\ dt$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tendant vers $-\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $b_n(t) = f(t)\int_{-\infty}^{x_n} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t)\ dt$.

• Chaque fonction b_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• La suite de fonctions $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $b\ :\ t \mapsto 0$ et la fonction nulle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $|b_n(t)| = |f(t)|\left|\int_{-\infty}^{x_n} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du\right| \leqslant |f(t)|\int_{-\infty}^{x_n} |g(u)|\ du \leqslant f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\ du = \|g\|_1|f(t)| = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (la fonction b est intégrable sur $\mathbb{R}$)
- la suite $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)\ dt$.

Plus explicitement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{x_n} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du\right) dt = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} B(x_n) = 0$.
Ainsi, pour tout suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} B(x_n) = 0$. On sait alors que $\lim\limits_{x\to-\infty} B(x) = 0$.

Ensuite, en prenant des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et pour b la fonction $t \mapsto f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tu}g(u)\ du = f(t)Tg(t)$, la même démarche montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)Tg(t)\ dt$.

e) Les fonctions A et B sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $A' = B'$. Donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $A(x) = B(x) + C$. Quand x tend vers $-\infty$, on obtient $0 = 0 + C$ et donc $C = 0$. Ceci montre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = B(x).$$

Mais alors, ces deux fonctions ont même limite en $+\infty$ ce qui fournit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)Tg(t)\ dt.$$

4) *Inversion de la transformation de Fourier*

a) Soit x un réel. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit g la fonction $t \mapsto e^{2i\pi xu}g_n(u)$. La fonction f est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ (pour tout réel t, $|g(t)| \leqslant 1$), intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer le résultat de la question précédente et on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}f(t)e^{2i\pi xt}g_n(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{T}g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(t-x)u}g_n(u)\,du\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\tau u}g_n(u)\,du\right)d\tau \text{ (en posant } \tau = t-x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\tau)\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

En tenant compte de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau = 1$ (d'après la question 2)c)),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}f(t)e^{2i\pi xt}g_n(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\tau)\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\tau)-f(x))\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau\\ &= f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\tau)-f(x))\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h_n(t) = \mathrm{T}f(t)e^{2i\pi xt}g_n(t) = \mathrm{T}f(t)e^{2i\pi xt}e^{-\frac{2\pi|t|}{n}}$.

• Chaque fonction h_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• La suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $h\ :\ t \mapsto \mathrm{T}f(t)e^{2i\pi xt}$ et de plus la fonction h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|h_n(t)| = |\mathrm{T}f(t)|e^{-\frac{2\pi|u|}{n}} \leqslant |\mathrm{T}f(t)| = \varphi(t)$ où la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}F(t)e^{2i\pi xt}g_n(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi xt}\mathrm{T}f(t)\,dt = \mathrm{T}(\mathrm{T}f)(-x)\\ &= \overline{\mathrm{T}}(\mathrm{T}(f))(x).\end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}F(t)e^{2i\pi xt}g_n(t)\,dt = \overline{\mathrm{T}}(\mathrm{T}f)(x)$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, un point de continuité de f. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $(|\tau| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x+\tau)-f(x)| \leqslant \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\tau)-f(x))\mathrm{T}g_n(\tau)\,dt\right| &= \left|\int_{-\alpha}^{\alpha}(f(x+\tau)-f(x))\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau + \int_{|t|\geqslant\alpha}(f(x+\tau)-f(x))\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau\right|\\ &\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x+\tau)-f(x)|\,|\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau + \int_{|t|\geqslant\alpha}(|f(x+\tau)|+|f(x)|)\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau\\ &\text{(car } \mathrm{T}g_n \geqslant 0 \text{ d'après 2)b))}\\ &\leqslant \varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau + \left(\sup_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\right)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\tau)|\,d\tau + |f(x)|\int_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau\\ &\leqslant \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau + \left(\sup_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\right)\|f\|_1 + |f(x)|\int_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau\\ &\text{(en posant } u = x+\tau)\\ &= \varepsilon + \left(\sup_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\right)\|f\|_1 + |f(x)|\int_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

D'après les questions 2)b) et 2)v), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\right)\|f\|_1 + |f(x)|\int_{|\tau|\geqslant\alpha}\mathrm{T}g_n(\tau)\,d\tau = 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left(\sup\limits_{|\tau|\geqslant\alpha} Tg_n(\tau)\right)\|f\|_1 + |f(x)|\displaystyle\int_{|\tau|\geqslant\alpha} Tg_n(\tau)\,d\tau \leqslant \varepsilon$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\tau)-f(x))Tg_n(\tau)\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon$.

On a montré que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\tau)-f(x))Tg_n(\tau)\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon\right)$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\tau)-f(x))Tg_n(\tau)\,dt = 0$.

d) Soit x un point de continuité de f. Quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question a), les questions b) et c) fournissent $\overline{T}(Tf)(x) = f(x)$.

5) *Application à la recherche d'autres transformées de Fourier*

a) D'après la question 2)b), $G_1 = T(\pi g_1)$ et donc pour tout réel t, puisque πg_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et que sa transformée de FOURIER G_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$TG_1(-t) = \overline{T}(G_1)(t) = \overline{T}\left(T\left(\pi g_1\right)\right)(t) = \pi g_1(t) = \pi e^{-2\pi|t|}$$

et donc, pour tout réel t, $TG_1(t) = \pi e^{-2\pi|-t|} = \pi e^{-2\pi|t|}$.

b) Pour tout réel t, $Th_0(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2i\pi tu}e^{-au}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2i\pi t)u}\,du$. Puisque $\mathrm{Re}(a+2i\pi t) = \mathrm{Re}(a) > 0$, la question 2)a) fournit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Th_0(t) = \frac{1}{a+2i\pi t}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note tout d'abord que $\left|e^{-(a+2i\pi t)u}u^n\right| = u^n e^{-\mathrm{Re}(a)u}$ et donc que $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-(a+2i\pi t)u}u^n = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Une intégration par parties, licite, fournit alors :

$$\begin{aligned}Th_n(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+2i\pi t)u}\frac{u^n}{n!}\,du = \left[-\frac{e^{-(a+2i\pi t)u}}{a+2i\pi t}\frac{u^n}{n!}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a+2i\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+2i\pi t)u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du\\ &= \frac{1}{a+2i\pi t}Th_{n-1}(t).\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ Th_n(t) = \frac{1}{(a+2i\pi t)^{n+1}}.$$

c) Soit $n \geqslant 1$. La fonction h_n est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $Th_n = H_n$. Donc, pour tout réel t,

$$TH_n(-t) = \overline{T}H_n(t) = \overline{T}\left(Th_n\right)(t) = h_n(t)$$

puis,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ TH_n(t) = h_n(-t) = \left\{\begin{array}{l}\frac{(-1)^n t^n}{n!}e^{at} \text{ si } t \leqslant 0\\ 0 \text{ si } t > 0\end{array}\right..$$

Si $n = 0$, la fonction $H_0\ :\ u \mapsto \dfrac{1}{a+2i\pi u}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ et on ne sait donc pas si la formule d'inversion de FOURIER reste valable.

