# Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
# 2023

**Épreuve de Mathématiques MP – MPI – PC – PSI**

---

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ :

— $\mathcal{C}^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;

— $\mathcal{C}^{n,pm}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;

— $\mathcal{C}^n_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;

— $\mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;

— pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$, on définit **sa régularisée** $\widetilde{f}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$ ;

— on pourra dire qu'une fonction est **normalisée** lorsqu'elle sera confondue avec sa régularisée ;

— l'ensemble des fonctions normalisées de $\mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$ sera noté $\widetilde{\mathcal{C}}^{n,pm}_{2\pi}$.

## 1 Projection sur l'espace des polynômes trigonométriques

On considère l'application $< .\,, . >$ définie par $< f\,,\, g > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\ \mathrm{d}t$ pour $f$ et $g$ dans $\mathcal{C}^{0,pm}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $< .\,, . >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.
2. $< .\,, . >$ est-il un produit scalaire sur $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$ ? Justifier votre réponse.
3. Montrer que $< .\,, . >$ est un produit scalaire sur $\widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$.

On muni $\widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ du produit scalaire $< .\,, . >$.
On note $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par : $\forall f \in \widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi},\ \|f\|_2 = \sqrt{< f\,,\, f >}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions de $\widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ suivantes : $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$.
On pose $F_n = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ est orthogonale.
5. Déterminer la norme de $c_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis celle de $s_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
   En déduire une base orthonormée de $F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de $p_n(f)$, la projection orthogonale de $f$ sur $F_n$.

## 2 Coefficients et série de Fourier

Soit $f$ de $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$, on définit $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ les **coefficients de Fourier** de $f$ par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

On définit également $S(f)$ la **série de Fourier** de $f$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right)$$

et $S_n(f)$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, montrer que :
   — si $f$ est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$ ;
   — si $f$ est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = 0$.

8. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et $x$ un réel strictement positif. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = 0$.
   Que peut-on en déduire concernant $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ ?

# 3 Intégrale de Dirichlet

On définit les intégrales suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)\,t)}{\sin(t)}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$.

9. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.
10. Montrer que $t \mapsto \dfrac{t - \sin t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et préciser le prolongement.
11. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.
12. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

# 4 Théorème de Dirichlet

On fixe dans cette partie $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$.

13. Soit $u$ un réel qui n'est pas un multiple de $2\pi$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.
14. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-u)\right)}{2\sin\left(\frac{x-u}{2}\right)} f(u)\,\mathrm{d}u$.
15. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(u+x)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u)\,\mathrm{d}u$.
16. Conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \left(f(u+x) + f(x-u)\right)\,\mathrm{d}u$.
17. On considère la fonction $h$ définie par :
$$\forall u \in ]0,\pi],\ h(u) = \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)$$
   Montrer que $h$ est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
   On pourra noter $f(x^+) = \displaystyle\lim_{t\to x^+} f(t)$ et $f(x^-) = \displaystyle\lim_{t\to x^-} f(t)$.

On admet, pour la question 18 uniquement, le **lemme de Riemann-Lebesgue** :
$$\forall f \in \mathcal{C}^{0,pm}([a,b]),\ \lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = 0$$

18. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\,\mathrm{d}u$ puis que $S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.

## 5 Étude d'une fonction auxiliaire

On définit à présent $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ et $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

19. Montrer que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
20. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F(x) = \dfrac{2}{x}G(x)$.
21. Montrer que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G'(x) = F(x) - H(x)$.
22. Montrer que $H$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ H'(x) = -G(x)$.
23. En déduire que $F$ est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F''(x) = F(x)$.
24. Montrer que $F$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

## 6 Un développement en série de Fourier

Soient $a > 0$ et $f$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{Z},\ f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2}$.

25. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x) + f_{-n}(x))$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n'(x) + f_{-n}'(x))$ convergent normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.
26. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$.
27. Montrer que $f$ est paire, $2\pi$-périodique et dans $\mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$.
28. Déterminer $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi a}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2nat)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
29. En déduire une expression simple de $a_n(f)$ puis le développement en série de Fourier de $f$.
30. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}\pi$.

**Fin du sujet**