Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques

Partie 1. Projection sur l'espace des polynômes trigonométriques

1) • Pour tout $(f,g)\in\left(\mathcal{C}^0_{2\pi}\right)^2$, la fonction fg est continue sur le segment $[0,2\pi]$ et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ existe. Par suite, $\langle .,.\rangle$ est une application de $\left(\mathcal{C}^0_{2\pi}\right)^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $(f,g)\in\left(\mathcal{C}^0_{2\pi}\right)^2$, $\langle f,g\rangle=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)f(t)\ dt=\langle g,f\rangle$. Donc, $\langle .,.\rangle$ est symétrique.

• $\langle .,.\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable, par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégration, puis bilinéaire par symétrie. $\langle .,.\rangle$ est donc une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

• Pour tout $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}$, $\langle f,f\rangle=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(f(t))^2\ dt\geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive). Donc, $\langle .,.\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

• Soit $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle=0&\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2\ dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in[0,2\pi],\ f(t)=0\text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=0\text{ (par }2\pi\text{-périodicité de la fonction }f)\\&\Rightarrow f=0.\end{aligned}$$

Finalement, $\langle .,.\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et donc $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}1\text{ si }t\in 2\pi\mathbb{Z}\\0\text{ si }t\notin 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$. La fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f n'est pas la fonction nulle.

Sur le segment $[0,2\pi]$, la fonction f ne diffère de la fonction nulle qu'en un point et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ dt=\int_0^{2\pi}0\ dt=0$ puis $\langle f,f\rangle=0$.

Ainsi, il existe $f\in\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$ telle que $f\neq 0$ et $\langle f,f\rangle=0$. $\langle .,.\rangle$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$.

3) Pour toute $f\in\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$ et tout $x_0\in\mathbb{R}$, on pose $f\left(x_0^+\right)=\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}f(x)$ et $f\left(x_0^-\right)=\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}f(x)$. On a alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \widetilde{f}(x)=\frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}.$$

En particulier, en tout réel x_0 en lequel f est continue, on a $\widetilde{f}\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$. On note également que $\widetilde{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique car pour tout réel x,

$$\widetilde{f}(x+2\pi)=\frac{f\left((x+2\pi)^+\right)+f\left((x+2\pi)^-\right)}{2}=\frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}=\widetilde{f}(x).$$

Comme à la question 1), $\langle .,.\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, positive, sur $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$.

Soit $f\in\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$. Soit $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=2\pi$ une subdivision adaptée à la fonction f. Donc, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $f_{/]x_k,x_{k+1}[}$ est continue sur $]x_k,x_{k+1}[$. Ci-dessous, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, on note g_k la fonction qui coïncide avec f sur $]x_k,x_{k+1}[$ et qui prend la valeur $f\left(x_k^+\right)$ (resp. $f\left(x_{k+1}^-\right)$) en x_k (resp. x_{k+1}). La fonction g_k est alors continue sur $[x_k,x_{k+1}]$ et coïncide avec f sur $]x_k,x_{k+1}[$.

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^{2\pi}\left(\widetilde{f}(x)\right)^2\ dx = 0\\
&\Rightarrow \int_0^{2\pi}(f(x))^2\ dx = 0 \text{ (car les fonctions } f \text{ et } \widetilde{f} \text{ ne différent qu'en un nombre fini de points sur } [0,2\pi])\\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x))^2\ dx = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(g_k(x))^2\ dx = 0\\
&\Rightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \int_{x_k}^{x_{k+1}}(g_k(x))^2\ dx = 0 \text{ (nombres positifs de somme nulle)}\\
&\Rightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall x\in[x_k,x_{k+1}],\ (g_k(x))^2 = 0 \text{ (fonctions continues, positives, d'intégrales nulles)}\\
&\Rightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall x\in]x_k,x_{k+1}[,\ f(x) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle = 0$, alors pour tout $x\in[0,2\pi]\setminus\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$, $\widetilde{f}(x) = f(x) = 0$. D'autre part, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$\widetilde{f}(x_k) = \frac{f\left(x_k^+\right)+f\left(x_k^-\right)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0.$$

Donc, $\widetilde{f}$ est nulle sur $[0,2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. On a montré que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$.

4) Si $n=0$, il n'y a rien à dire. On suppose dorénavant $n\geqslant 1$. Soit $(k,l)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $k\neq l$. Alors, $k-l\neq 0$ et d'autre part, $k+l\neq 0$ car $k+l>0$.

$$\begin{aligned}
2\pi\,\langle c_k,c_l\rangle &= \int_0^{2\pi}\cos(kt)\cos(lt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((k-l)t)+\cos((k+l)t))\ dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k-l)t)}{k-l}+\frac{\sin((k+l)t)}{k+l}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Soit $(k,l)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $k\neq l$.

$$\begin{aligned}
2\pi\,\langle s_k,s_l\rangle &= \int_0^{2\pi}\sin(kt)\sin(lt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((k-l)t)+\cos((k+l)t))\ dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k-l)t)}{k-l}-\frac{\sin((k+l)t)}{k+l}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Soit $(k,l)\in[\![0,n]\!]\times[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
2\pi\,\langle s_k,c_l\rangle &= \int_0^{2\pi}\sin(kt)\cos(lt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin((k+l)t)+\sin((k-l)t))\ dt\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((k+l)t)}{k+l}-\frac{\cos((k-l)t)}{k-l}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité de } \cos).
\end{aligned}$$

On a montré que la famille $(c_0,c_1,\dots,c_n,s_1,\dots,s_n)$ est orthogonale.

5) $\|c_0\|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}1\ dt = 1$ puis $\|c_0\| = 1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\|c_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(nt)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2nt))}{2}\ dt = \frac{1}{2\pi}\left(\pi+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}$$

et

$$\|s_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(nt)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2nt))}{2}\ dt = \frac{1}{2\pi}\left(\pi-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\|c_n\| = \|s_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Une base orthonormée de F_n est donc $\left(c_0,\sqrt{2}c_1,\dots\sqrt{2}c_n,\sqrt{2}s_1,\dots,\sqrt{2}s_n\right)$.

6) Soit $f \in \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$. On sait que

$$\begin{aligned} p_n(f) &= \langle c_0, f\rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} \langle \sqrt{2}c_k, f\rangle \sqrt{2}c_k + \sum_{k=1}^{n} \langle \sqrt{2}s_k, f\rangle \sqrt{2}s_k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kt)f(t)\,dt\right)c_k + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kt)f(t)\,dt\right)s_k\right). \end{aligned}$$

Partie 2. Coefficients et série de Fourier

7) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, impaire. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 2π-périodicité de la fonction $t \mapsto f(t)\cos(nt)$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\cos(n(-u))\,(-du) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(nu)\,du = -a_n(f)$$

puis $2a_n(f) = 0$ puis $a_n(f) = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, paire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 2π-périodicité de la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\sin(n(-u))\,(-du) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nu)\,du = -b_n(f)$$

puis $2b_n(f) = 0$ puis $b_n(f) = 0$.

8) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1}$. Soit $x > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \dfrac{e^{ixt}}{ix}$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, b]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = \left[f(t)\times\frac{e^{ixt}}{ix}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\times\frac{e^{ixt}}{ix}\,dt = \frac{1}{ix}\left(f(b)e^{ixb} - f(a)e^{ixa} - \int_a^b f'(t)e^{ixt}\,dt\right).$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt\right| &= \frac{1}{x}\left|f(b)e^{ixb} - f(a)e^{ixa} - \int_a^b f'(t)e^{ixt}\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\left(\left|f(b)e^{ixb}\right| + \left|f(a)e^{ixa}\right| + \int_a^b |f'(t)|\left|e^{ixt}\right|\,dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right). \end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right) = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = 0$. Par passage aux parties réelles et imaginaires, on en déduit encore que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(xt)\,dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0$. En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$.

Partie 3. Intégrale de Dirichlet

9) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{t\to0}{\sim} 2n+1$. On en déduit l'existence de I_n. Ensuite,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(t)\cos((2n+2)t)}{\sin(t)}\,dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t)\,dt = 2\left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin((n+1)\pi) - \sin(0)}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

10) La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}$ est de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3/6}{t^2} = \dfrac{t}{6}$ puis $\dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)} \underset{t\to 0}{\to} 0$. Donc, la fonction g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ (on note encore g le prolongement).

Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$ puis $g'(t) = -\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)} + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)}$ puis

$$g'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{\left(t - \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right)^2 - t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right)}{t^2\left(t^2 + o\left(t^2\right)\right)} \underset{t\to 0}{=} \frac{t^2(1-1) + t^4\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + o\left(t^4\right)}{t^4 + o\left(t^4\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{6}.$$

En notant toujours g le prolongement, $g \in C^0\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right) \cap C^1\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ et de plus, la fonction g' a une limite réelle en 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction g est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge par continuité en 0. On en déduit l'existence de J_n puis

$$\begin{aligned} I_n - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\sin((2n+1)t)\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\ dt. \end{aligned}$$

Puisque la fonction g est de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ d'après la question précédente, la question 8) permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$. Mais alors,

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} I_n - \lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = \frac{\pi}{2}.$$

12) En posant $u = (2n+1)t$, on a encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}\ du$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}\ du = \frac{\pi}{2}$.

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit l'existence de l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\ dt$. Soit alors $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} - \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x).

Pour tout $x > 0$, on a $n_x + 1 > \dfrac{x}{\pi} - \dfrac{1}{2}$ puis $n_x \geqslant \dfrac{x}{\pi} - \dfrac{3}{2}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} n_x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} J_{n_x} = \dfrac{\pi}{2}$. D'autre part, pour $x > 0$, $\left(n_x + \dfrac{1}{2}\right)\pi \leqslant x < \left(n_x + \dfrac{1}{2}\right)\pi + \pi$ puis

$$\begin{aligned} |I(x) - J_{n_x}| &= \left|\int_{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t}\ dt\right| \\ &\leqslant \int_{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\pi}^{x} \frac{|\sin(t)|}{t}\ dt \leqslant \int_{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\pi+\pi} \frac{1}{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\pi}\ dt = \frac{1}{n_x + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $I(x) - J_{n_x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Mais alors, $I(x) = J_{n_x} + I(x) - J_{n_x}$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. On a montré la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ et de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie 4. Le théorème de Dirichlet

13) Soient $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\dfrac{u}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ puis $\sin\left(\dfrac{u}{2}\right) \neq 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right) &= \sin\left(\frac{u}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(ku) \\
&= \sin\left(\frac{u}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)u\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)u\right)\right) \\
&= \sin\left(\frac{u}{2}\right) + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right),
\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.

14) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(ku)\cos(kx) + \sin(ku)\sin(kx))\right) f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(u-x))\right) f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(u-x))\right) f(u)\,du \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité).}
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout réel u tel que $u - x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(u-x)) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)\right)}{2\sin\left(\frac{u-x}{2}\right)}$, cette égalité « restant vraie » en tout réel u de la forme $x + 2K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$, par continuité. Donc,

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)\right)}{2\sin\left(\frac{u-x}{2}\right)} f(u)\,du.$$

15) En posant $t = u - x$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} f(t+x)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x+u)\,du \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité).}
\end{aligned}$$

En posant $t = -u$, on a encore

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(-t)\right)}{2\sin\left(-\frac{t}{2}\right)} f(x-t)\ (-dt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u)\ du.$$

16) On en déduit enfin que pour tout réel x,

$$\begin{aligned}2S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x+u)\ du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u)\ du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u)+f(x-u))\ du.\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}(f(x+u)+f(x-u))$ est paire et donc

$$2S_n(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u)+f(x-u))\ du$$

puis

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u)+f(x-u))\ du.$$

17) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, en un éventuel point de discontinuité x de f, la fonction $f_{/]x,+\infty[}$ (resp. $h_{/]-\infty,x[}$) se prolonge en une fonction de classe C^1 au voisinage de x à droite (resp. à gauche). On note alors $f'(x^+)$ (resp. $f'(x^-)$) la dérivée à droite (resp. à gauche) de ce prolongement (et si f est dérivable en x, on a $f'(x^+) = f'(x^-) = f'(x)$). Dans tous les cas, la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 à droite et à gauche en x.

La fonction h est continue par morceaux sur $]0,\pi]$ et de plus,

$$\begin{aligned}h(u) &\underset{u\to 0,\ u>0}{=} \frac{1}{2\left(\frac{u}{2}+o(u)\right)}\left(\frac{f(x^+)+uf'(x^+)+(x^-)-uf'(x^-)+o(u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right) \\ &\underset{u\to 0,\ u>0}{=} \frac{1}{u+o(u)}\left(\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} - \widetilde{f}(x) + u\frac{f'(x^+)-f'(x^-)}{2} + o(u)\right) \\ &\underset{u\to 0,\ u>0}{=} \frac{f'(x^+)-f(x^-)}{2} + o(1).\end{aligned}$$

La fonction h a une limite réelle quand u tend vers 0 par valeurs supérieures et donc la fonction h se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

18) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = \dfrac{u}{2}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\ dt = I_n = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}(f(x+u)+f(x-u))\ du - \widetilde{f}(x)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\ du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\ du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\ du.$$

Puisque h se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \widetilde{f}(x).$$

On a montré que la série de Fourier de f converge en tout réel x et que pour tout réel x, $S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.

Partie 5. Etude d'une fonction auxiliaire

19) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que $F(x)$ existe. On a montré que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\ dt$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $|f(x,t)| = \dfrac{|\cos(xt)|}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$, où de plus la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-xt)}{1+t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ dt = F(x).$$

La fonction F est paire.

20) Soit $x > 0$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{x}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\times\frac{1}{1+t^2}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\sin(tx)}{x}\times\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\ dt$$

$$= \frac{\sin(Ax)}{x(1+A^2)} + \frac{2}{x}\int_0^A \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\ dt.$$

Ensuite, pour tout $A > 0$, $\left|\dfrac{\sin(Ax)}{x(1+A^2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{x(1+A^2)}$ et donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\sin(Ax)}{x(1+A^2)} = 0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale définissant $G(x)$ et de plus

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ dt = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\ dt = \frac{2}{x}G(x).$$

21) Posons $g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\ dt$.

• Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^3}$ en $+\infty$.

• La fonction g admet sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t^2\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

De plus,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$,
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, la fonction $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = \varphi_1(t)$ où la fonction φ_1 est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel strictement positif x,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt.$$

On en déduit encore que, pour $x > 0$,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\left(t^2+1-1\right)\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = F(x) - H(x).$$

22) De manière analogue à la question 21), on pose $h : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)\,dt$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{t\sin(x,t)}{\left(1+t^2\right)^2} = -g(x,t).$$

Puisque pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{\left(1+t^2\right)^2} = \varphi_2(t)$ où φ_2 est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^3}$ en $+\infty$. La fonction H est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$H'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = -G(x).$$

23) Puisque pour tout $x > 0$, $F(x) = \dfrac{2}{x}G(x)$, la fonction F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{2}{x}G'(x) - \frac{2}{x^2}G(x).$$

Mais alors la fonction F' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ ou encore F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour $x > 0$, $xF(x) = 2G(x)$ puis en dérivant, $xF'(x) + F(x) = 2G'(x) = 2F(x) - 2H(x)$ puis $xF'(x) = F(x) - 2H(x)$. En redérivant, pour $x > 0$, $F'(x) + xF''(x) = F'(x) - 2H'(x)$ puis $xF''(x) = -2H'(x) = 2G(X) = xF(x)$. Finalement, pour $x > 0$, $F''(x) = F(x)$.

24) Pour tout $x > 0$, $F''(x) - F(x) = 0$ et donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x > 0$, $F(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$, ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité.

La fonction F est bornée sur $[0,+\infty[$ car pour tout $x \geqslant 0$, $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xt)|}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Mais si $\lambda \neq 0$, $|F(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |\lambda|e^x \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ ce qui est exclu. Donc, $\lambda = 0$. Ensuite, $\mu = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Ceci montre que

$$\forall x \geqslant 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$

Ensuite, la fonction F est paire et donc pour $x < 0$, $F(x) = F(-x) = \frac{\pi}{2}e^{-(-x)} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ ce qui est également vrai si $x \geqslant 0$. On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Partie 6. Un développement en série de Fourier

25) • Puisque $a > 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+2n\pi)^2 + a^2 > 0$. Les fonctions f_n, $n \in \mathbb{Z}$, sont définies puis de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que fractions rationnelles définies sur $\mathbb{R}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $|f_n(x) + f_{-n}(x)| = f_n(x) + f_{-n}(x) = \frac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2} + \frac{1}{(x-2n\pi)^2 + 4a^2}$.
Ensuite, pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $0 \leqslant 2(n-1)\pi = -2\pi + 2n\pi \leqslant x + 2n\pi$ puis $(x+2n\pi)^2 + a^2 \geqslant 4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2 > 0$ et donc

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2} \leqslant \frac{1}{4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2}.$$

De même, pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $x - 2n\pi \leqslant 2\pi - 2n\pi = -2(n-1)\pi \leqslant 0$ puis $(x+2n\pi)^2 + a^2 \geqslant 4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2 > 0$ et donc

$$0 \leqslant f_{-n}(x) = \frac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2} \leqslant \frac{1}{4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2}.$$

On en déduit que pour tout $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $|f_n(x) + f_{-n}(x)| \leqslant \frac{2}{4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2} = \frac{1}{2\left((n-1)^2 + a^2\right)}$ et donc

$$\|f_n + f_{-n}\|_{\infty,[-2\pi,2\pi]} \leqslant \frac{1}{2\left((n-1)^2 + a^2\right)}.$$

La série numérique de terme général $\frac{1}{2\left((n-1)^2 + a^2\right)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (car $\frac{1}{2\left((n-1)^2 + a^2\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} > 0$) et donc la série de fonctions de terme général $f_n + f_{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $(f_n + f_{-n})'(x) = \frac{-2(x+2n\pi)}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2} + \frac{-2(x-2n\pi)}{(x-2n\pi)^2 + 4a^2}$ puis

$$\left|f_n'(x) + f_{-n}'(x)\right| \leqslant \frac{2(2\pi + 2n\pi)}{\left(4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2\right)^2} + \frac{2(2\pi + 2n\pi)}{\left(4(n-1)^2\pi^2 + 4a^2\right)^2} = \frac{(n+1)\pi}{2\left((n-1)^2\pi^2 + a^2\right)^2}.$$

On en déduit que $\left\|f_n' + f_{-n}'\right\|_{\infty,[-2\pi,2\pi]} \leqslant \frac{(n+1)\pi}{2\left((n-1)^2\pi^2 + a^2\right)^2}$. La série numérique de terme général $\frac{(n+1)\pi}{2\left((n-1)^2\pi^2 + a^2\right)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (car $\frac{(n+1)\pi}{2\left((n-1)^2\pi^2 + a^2\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^3} > 0$) et donc la série de fonctions de terme général $f_n' + f_{-n}'$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.

26) Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la série de fonctions de terme général $f_n + f_{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier simplement sur $[-2\pi, 2\pi]$. La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) + f_{-n}(x))$ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $f = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n + f_{-n})$.

Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La série de fonctions de terme général $f_n + f_{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[-2\pi, 2\pi]$ et la série de fonctions de terme général $f_n' + f_{-n}'$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[-2\pi, 2\pi]$. La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) + f_{-n}(x))$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus

$\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n+f_{-n})\right)'=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f'_n+f'_{-n}\right)$. Il en est de même de la fonction $f=f_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n+f_{-n})$:

$$f'=f'_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f'_n+f'_{-n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f'_n.$$

27) Pour $x\in\mathbb{R}$, en posant $p=-n$,

$$f(-x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(-x+2n\pi)^2+4a^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-2n\pi)^2+4a^2}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+2p\pi)^2+4a^2}=f(x).$$

Donc, la fonction f est paire. Ensuite, pour $x\in\mathbb{R}$, en posant $p=n+1$,

$$f(x+2\pi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+2\pi+2n\pi)^2+4a^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+2(n+1)\pi)^2+4a^2}=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+2p\pi)^2+4a^2}=f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique. Enfin, puisque la fonction f est de classe C^1 sur $[0,2\pi]$ et 2π-périodique, f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

28) D'après la question 7), puisque f est paire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La série de fonctions de terme général $g_p\ :\ t\mapsto(f_p(t)+f_{-p}(t))\cos(nt)$, $p\in\mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,2\pi]$ (car pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\|g_p\|_{\infty,[0,2\pi]}\leqslant\|f_p+f_{-p}\|_{\infty,[0,2\pi]}$). On peut donc intégrer terme à terme.

$$\begin{aligned}
a_n(f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)\ dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}f_0(t)\cos(nt)\ dt+\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}f_p(t)\cos(nt)\ dt+\int_0^{2\pi}f_{-p}(t)\cos(nt)\ dt\right)\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{(t+2p\pi)^2+4a^2}\ dt=\frac{1}{4a^2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{\left(\dfrac{t+2p\pi}{2a}\right)^2+1}\ dt\\
&=\frac{1}{4a^2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{p\pi}{a}}^{\frac{(p+1)\pi}{a}}\frac{\cos(2nau-2np\pi)}{u^2+1}\ 2a du\ \text{(en posant } u=\frac{t+2p\pi}{2a}\text{)}\\
&=\frac{1}{2a\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_{\frac{p\pi}{a}}^{\frac{(p+1)\pi}{a}}\frac{\cos(2nau)}{u^2+1}\ du=\frac{1}{2a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2nau)}{u^2+1}\ du\\
&=\frac{1}{\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2nau)}{u^2+1}\ du\ \text{(par parité)}.
\end{aligned}$$

29) D'après la question 24), pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=\dfrac{1}{\pi a}F(2na)=\dfrac{1}{2a}e^{-2na}$ puis pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
S(f)(x)&=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nx)=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2na}\cos(nx)\\
&=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2na}e^{inx}\right)=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2a}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{n(-2a+ix)}\right)\\
&=\frac{1}{4a}\left(1+2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-2a+ix}}{1-e^{-2a+ix}}\right)\right)\ \left(\text{car }\left|e^{-2a+ix}\right|=e^{-2a}<1\right)\\
&=\frac{1}{4a}\left(1+2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-2a+ix}\left(1-e^{-2a-ix}\right)}{\left(1-e^{-2a+ix}\right)\left(1-e^{-2a-ix}\right)}\right)\right)=\frac{1}{4a}\left(1+2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-2a+ix}-e^{-4a}}{1-2e^{-2a}\cos(x)+e^{-4a}}\right)\right)\\
&=\frac{1}{4a}\left(1+2\frac{e^{-2a}\cos(x)-e^{-4a}}{1-2e^{-2a}\cos(x)+e^{-4a}}\right).
\end{aligned}$$

30) f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, pour tout réel x, $S(f)(x)=\widetilde{f}(x)$. En particulier, $S(f)(0)=\widetilde{F}(0)=f(0)$. En prenant $a=\pi>0$, on a

$$f(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n\pi)^2+4\pi^2}=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
S(f)(0)&=\frac{1}{4\pi}\left(1+2\frac{e^{-2\pi}-e^{-4\pi}}{1-2e^{-2\pi}+e^{-4\pi}}\right)=\frac{1}{4\pi}\times\frac{1-e^{-4\pi}}{1-2e^{-2\pi}+e^{-4\pi}}\\
&=\frac{1}{4\pi}\times\frac{\left(1-e^{-2\pi}\right)\left(1+e^{-2\pi}\right)}{\left(1-e^{-2\pi}\right)^2}=\frac{1}{4\pi}\times\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}\\
&=\frac{1}{4\pi}\times\frac{e^{-\pi}\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right)}{e^{-\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}=\frac{1}{4\pi}\times\frac{2\,\mathrm{ch}(\pi)}{2\,\mathrm{sh}(\pi)}\\
&=\frac{\mathrm{ch}(\pi)}{4\pi\,\mathrm{sh}(\pi)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\mathrm{ch}(\pi)}{4\pi\,\mathrm{sh}(\pi)}$ puis que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi\,\mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}.$$

