Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

Partie I. Exemples de suites géométriques matricielles

1) *Cas où la suite* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *est constante pour* $k \geqslant 1$

a) Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que la suite $\left(M^k\right)_{k\geqslant 1}$ est constante. Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $M^k = M$ et en particulier, $M^2 = M$. M est donc une matrice de projection.

Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice de projection. Alors, $M^2 = M$ puis, par récurrence, pour tout $k \geqslant 1$, $M^k = M$. La suite $\left(M^k\right)_{k\geqslant 1}$ est donc constante.

On a montré que pour toute $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, la suite $\left(M^k\right)_{k\geqslant 1}$ est constante si et seulement si M est une matrice projection.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice de projection. Pour tout $k \geqslant 1$, $M^k = M$. Mais alors, la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M. M est donc la limite d'une suite géométrique matricielle.

2) *Etude de la suite* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *lorsque la matrice* M *est orthogonale*

a) Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MM^T \end{array}$, $g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) & \to & (\mathcal{M}_N(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M, M^T) \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_N(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{array}$.

L'application g est continue sur l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ car g est linéaire et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est de dimension finie. L'application h est continue sur l'espace $(\mathcal{M}_N(\mathbb{R}))^2$ car h est bilinéaire et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Mais alors, $f = h \circ g$ est continue sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

$O_N(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) / \ MM^T = I_n\right\}$ ou encore $O_N(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_N)$. $\{I_n\}$ est un fermé de $O_N(\mathbb{R})$ (boule fermée de centre I_N et de rayon 0) et donc $O_N(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

b) Soit $M \in O_N(\mathbb{R})$. Puisque $(O_N(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in O_N(\mathbb{R})$.

Supposons de plus que la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice L. Puisque $O_N(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, la matrice L appartient à $O_N(\mathbb{R})$. En particulier, la matrice L est inversible.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{k+1} = M \times M^k = M^k \times M$. Les applications $u : A \mapsto MA$ et $v : B \mapsto BM$ sont continues sur l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et en particulier en L, en tant qu'endomorphismes d'un espace de dimension finie. Par suite,

$$L = \lim_{k\to+\infty} M^{k+1} = \lim_{k\to+\infty} M \times M^k = \lim_{k\to+\infty} u\left(M^k\right) = u\left(\lim_{k\to+\infty} M^k\right) = M \times \lim_{k\to+\infty} M^k = ML$$

et de même, $LM = L$. Ainsi, $ML = I_N L$. Puisque L est inversible, L est simplifiable pour $\times$ et après simplification, on obtient $M = I_N$. On en déduit encore que $L = \lim\limits_{k\to+\infty} I_N^k = I_N$.

c) Soit $M \in O_N(\mathbb{R})$. D'après b), si la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors $M = I_N$. Réciproquement, si $M = I_N$, on a effectivement $M \in O_N(\mathbb{R})$ puis la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et donc convergente.

On a montré que, pour toute $M \in O_N(\mathbb{R})$, la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $M = I_N$.

3) *Etude de la suite* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *lorsque la matrice* M *est antisymétrique*

a) $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ sont des fermés de l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ en tant que sous-espaces vectoriels de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) Soit $M \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$. Donc, $M^T = -M$. On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(M^k\right)^T = \left(M^T\right)^k = (-M)^k = (-1)^k M^k.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(M^{2k}\right)^T = M^{2k}$ et donc $M^{2k} \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(M^{2k+1}\right)^T = -M^{2k+1}$ et donc $M^{2k+1} \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$

c) Si la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice L, les deux suites extraites $\left(M^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(M^{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers L.

La suite $\left(M^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est fermé. Donc $L \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. De même, la suite $\left(M^{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ est fermé. Donc $L \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

En résumé, $L \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_N(\mathbb{R}) = \{0\}$ puis $L = 0$.

4) *Etude de la suite* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *lorsque la matrice* M *est symétrique*

a) Soit $M \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $P^{-1}MP = D$. On pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ où la numérotation a été faite de sorte que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_N$.

On a ainsi fourni une matrice inversible P et des réels $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_N$ tels que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}M^kP = \left(P^{-1}MP\right)^k = D^k = \text{diag}\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k\right)$.

Les fonctions $u : N \mapsto P^{-1}NP$ et $v : N \mapsto PNP^{-1}$ sont continues sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ en tant qu'endomorphismes d'un espace de dimension finie. Donc, si la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(u\left(M^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et si la suite $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(v\left(D^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

En résumé, la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Maintenant,

$$\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!],\ \left(\lambda_i^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!],\ \lambda_i \in]-1, 1].$$

On a montré que la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $\lambda_i \in]-1, 1]$.

Cette dernière condition étant réalisée, $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots, 0)$. Mais alors, toujours par continuité de l'application $N \mapsto PNP^{-1}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = P\ \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots, 0)\ P^{-1}$. Ainsi,

$$L = P\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots, 0)P^{-1}.$$

Ensuite, $L^2 = P\ \text{diag}(\underbrace{1^2, \dots, 1^2}_{r}, 0^2, \dots, 0^2)\ P^{-1} = P\ \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots, 0)\ P^{-1} = L$. L est donc une matrice de projection.

5) *Etude de la suite* $\left((\lambda I_N + U)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *lorsque la matrice* U *est nilpotente et* $|\lambda| < 1$

a) Puisque les matrice λI_N et U commutent, la formule du binôme de Newton fournit pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda I_N + U)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} U^i.$$

On suppose de plus que $k \geqslant p$. Alors, pour $p \leqslant i \leqslant k$, $U^i = U^p \times U^{i-p} = 0$ et donc

$$(\lambda I_N + U)^k = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} U^i,$$

puis

$$\left\|(\lambda I_N + U)^k\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} U^i\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \left\|U^i\right\|.$$

b) Puisque $|\lambda| < 1$, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \left\|U^i\right\| = 0$ puis $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \left\|U^i\right\| = 0$ (le nombre de termes de la somme, à savoir p, étant constant quand k varie). Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|(\lambda I_N + U)^k\right\| = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (\lambda I_N + U)^k = 0$.

Partie II. Convergence et limite d'une suite géométrique matricielle

6) *Recherche de la limite éventuelle d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

a) La suite $\left(M^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Donc, la suite $\left(M^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et a même limite, à savoir L.

Par continuité de l'application $A \mapsto A^2$ (composée de l'application linéaire $A \mapsto (A, A)$ et de l'application bilinéaire $(A, B) \mapsto AB$), on a alors

$$L = \lim_{k\to+\infty} M^k = \lim_{k\to+\infty} M^{2k} = \lim_{k\to+\infty} \left(M^k\right)^2 = \left(\lim_{k\to+\infty} M^k\right)^2 = L^2.$$

L est donc nécessairement une matrice de projection.

b) Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N) \cap \mathrm{Im}\,(M - I_N)$. En particulier, $y \in \mathrm{Im}\,(M - I_N)$ et donc il existe $x \in \mathbb{K}^N$ tel que $y = (M - I_N)\,x = Mx - x$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $ky = M^k x - x$.

- L'égalité est vraie quand $k = 0$ (avec la convention $M^0 = I_N$).
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $ky = M^k x - x$. $y \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$. Donc $My = y$ puis, en tenant compte de $Mx = x + y$,

  $$ky = kMy = M^{k+1}x - Mx = M^{k+1}x - x - y$$

  et donc

  $$(k+1)y = M^{k+1}x - x.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$k\|y\| = \|ky\| = \left\|M^k x - x\right\| \leqslant \left\|M^k x\right\| + \|x\| \leqslant |||M^k|||\|x\| + \|x\|.$$

La suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et en particulier bornée. Soit m un majorant de la suite $\left(|||M^k|||\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$k\|y\| \leqslant (m+1)\|x\|.$$

La suite $(k\|y\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, ce qui impose $\|y\| = 0$ (sinon, $\lim\limits_{k\to+\infty} k\|y\| = +\infty$) puis $y = 0$.

Ainsi, $\forall y \in \mathbb{K}^N$, $(y \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N) \cap \mathrm{Im}\,(M - I_N) \Rightarrow y = 0)$ et donc $\mathrm{Ker}\,(M - I_N) \cap \mathrm{Im}\,(M - I_N) = \{0\}$.

Le théorème du rang fournit d'autre part $\dim(\mathrm{Ker}\,(M - I_N)) + \dim(\mathrm{Im}\,(M - I_N)) = \dim\left(\mathbb{K}^N\right) < +\infty$ et finalement,

$$\mathbb{K}^N = \mathrm{Ker}\,(M - I_N) \oplus \mathrm{Im}\,(M - I_N)\,.$$

c) Soit $x \in \mathbb{K}^N$. Il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$ (et donc $Mx_1 = x_1$) et $y \in \mathrm{Im}\,(M - I_N)$ tels que $x = x_1 + y$ puis il existe $x_2 \in \mathbb{K}^N$ tel que $y = Mx_2 - x_2$. Donc, il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N) \times \mathbb{K}^N$ tel que

$$x = x_1 + Mx_2 - x_2.$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k x = x_1 + M^{k+1}x_2 - M^k x_2$.

- $x_1 + M^1 x_2 - M^0 x_2 = x_1 + Mx_2 - x_2 = x = M^0 x$. L'égalité est vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $M^k x = x_1 + M^{k+1}x_2 - M^k x_2$. Alors,

  $$M^{k+1}x = M \times M^k x = Mx_1 + M^{(k+1)+1}x_2 - M^{k+1}x_2 = x_1 + M^{(k+1)+1}x_2 - M^{k+1}x_2.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = L$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k x = Lx$ (par continuité de l'application linéaire $u \mapsto Mu$). On a alors

$$Lx = \lim_{k\to+\infty} M^k x = \lim_{k\to+\infty} \left(x_1 + M^{k+1}x_2 - M^k x_2\right) = x_1 + Lx_2 - Lx_2 = x_1 = Px.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}^N$, $Lx = Px$ et donc $L = P$. Si de plus 1 n'est pas valeur propre de M, alors $\mathrm{Ker}\,(M - I_N) = \{0\}$ puis $P = 0$ et finalement $L = 0$.

7) *Conditions nécessaires de convergence d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

a) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k x = \lambda^k x$. L'égalité est vraie pour $k = 1$ par définition d'un vecteur propre et si pour $k \geqslant 1$, $M^k x = \lambda^k x$, alors $M^{k+1}x = M \times M^k x = \lambda^k M x = \lambda^{k+1} x$. Le résultat est démontré par récurrence.

Puisque la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $\left(\lambda^k x\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(M^k x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge (par continuité de l'application linéaire $N \mapsto Nx$). D'autre part, x n'est pas nul en tant que vecteur propre et donc la suite $\left(\lambda^k x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite numérique $\left(\lambda^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. En résumé, si la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $\left(\lambda^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

On sait alors que nécessairement ou bien $\lambda = 1$, ou bien $|\lambda| < 1$.

b) $y = Mx - x = (M - I_N)\,x \in \mathrm{Im}\,(M - I_N)$. D'autre part, $(M - I_N)\,y = (M - I_N)^2\,x = 0$ et donc $y \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$. Finalement, $y \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N) \cap \mathrm{Im}\,(M - I_N)$.

D'après la question 7)b), puisque par hypothèse la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, on a $\mathrm{Ker}\,(M - I_N) \cap \mathrm{Im}\,(M - I_N) = \{0\}$ et donc $y = 0$ ou encore $(M - I_N)\,x = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, si $x \in \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^2\right)$, alors $x \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^2\right) \subset \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$.
D'autre part, si $x \in \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$, alors $(M - I_N)\,x = 0$ puis $(M - I_N)\,(M - I_N)\,x = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^2\right)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}\,(M - I_N) \subset \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^2\right)$ et finalement que $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^2\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^k\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$.

- L'égalité est vraie quand $k = 2$.
- Soit $k \geqslant 2$. Supposons que $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^k\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$. On a déjà $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^k\right) \subset \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^{k+1}\right)$ (car $(M - I_N)^k\,x = 0 \Rightarrow (M - I_N)^{k+1}\,x = 0$). Inversement, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^{k+1}\right) &\Rightarrow (M - I_N)^{k+1}\,x = 0\\
&\Rightarrow (M - I_N)^2\,(M - I_N)^{k-1}\,x = 0 \text{ (en tenant compte de } k - 1 \geqslant 1\text{)},\\
&\Rightarrow (M - I_N)^{k-1}\,x \in \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^2\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_N)\\
&\Rightarrow (M - I_N)\,(M - I_N)^{k-1}\,x = 0 \Rightarrow (M - I_N)^k\,x = 0\\
&\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^k\right).
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^{k+1}\right) \subset \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^k\right)$ et finalement, $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^{k+1}\right) = \mathrm{Ker}\left((M - I_N)^k\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

En particulier, si $k = r \geqslant 1$, $\mathrm{Ker}\left((M - I_N)^r\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_N)$. Le sous-espace caractéristique de M associé à la valeur propre 1 est donc égal au sous-espace propre de M associé à la valeur propre 1. En particulier, puisque la dimension du sous-espace caractéristique est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante, on a montré que nécessairement $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(M - I_N)\right) = r$.

8) *Conditions suffisantes de convergence d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

a) Deux polynômes en f commutent et donc f et $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$ commutent. On sait alors que le noyau de $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$ est stable par f. f induit donc un endomorphisme $\widetilde{f}$ de $F = \mathrm{Ker}\left((f - \mathrm{Id}_E)^r\right)$. On note que $\widetilde{\mathrm{Id}}_E = \mathrm{Id}_F$.

Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\left((f - \mathrm{Id}_E)^r\right)$, $\left(\widetilde{f} - \widetilde{\mathrm{Id}}_E\right)^r(x) = (f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r(x) = 0$. Donc, $\widetilde{f} - \widetilde{\mathrm{Id}}_E$ est nilpotent d'indice de nilpotence inférieur ou égal à r.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ canoniquement associé à la matrice M.

Les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont deux à deux premiers entre eux car sans racines communes dans $\mathbb{C}$ et le polynôme $(X - \lambda_1)^{r_1} \ldots (X - \lambda_p)^{r_p}$ est annulateur de f (ou de M) d'après le théorème de Cayley-Hamilton. D'après le théorème de décomposition de noyaux, $\mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_1 I_E)^{r_1}\right) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_p I_E)^{r_p}\right)$ ou aussi

$$\mathbb{C}^N = \text{Ker}\left((M-\lambda_1 I_N)^{r_1}\right) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\left((M-\lambda_p I_N)^{r_p}\right).$$

On note alors B_0 la base canonique de $\mathbb{C}^N$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^N = \text{Ker}\left((f-\lambda_1 I_E)^{r_1}\right) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\left((f-\lambda_p I_E)^{r_p}\right)$ puis P la matrice de passage de la base B_0 à la base $\mathscr{B}$. Puisque les sous-espaces $F_i = \text{Ker}\left((f-\lambda_i I_E)^{r_i}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont stables par f la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs. Plus précisément, d'après les formules de changement de base, il existe des matrices M_1, ..., M_p, où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $M_i \in \mathcal{M}_i(\mathbb{C})$ telles que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & M_p \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$, on note f_i l'endomorphisme de $F_i = \text{Ker}\left((f-\lambda_i I_E)^{r_i}\right)$ induit par f. M_i est la matrice de f_i dans la base $\mathscr{B}_i$. D'après la question a), $f_i - \lambda_i \text{Id}_{F_i}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice inférieur ou égal à r_i et donc $M_i - \lambda_i I_{r_i}$ est une matrice nilpotente N_i d'indice de nilpotence inférieur ou égal à r_i et on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} + N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_p I_{r_p} + N_p \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}M^kP = \left(P^{-1}MP\right)^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{r_1} + N_1)^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{r_2} + N_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (\lambda_p I_{r_p} + N_p)^k \end{pmatrix}$. Puisque les valeurs propres de M ont un module strictement inférieur à 1, la question 5) permet d'affirmer que la suite $\left(P^{-1}M^kP\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Mais alors, par continuité de l'application $A \mapsto PAP^{-1}$, la suite $\left(M^k\right)_{k\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

On a montré que si toutes les valeurs propres de M sont de module strictement à 1, alors la suite $\left(M^k\right)_{k\mathbb{N}}$ converge vers 0.

c) Puisque $\text{Ker}\,(M-I_N) \subset \text{Ker}\left((M-I_N)^{r_1}\right)$ et que $\dim\left(\text{Ker}\,(M-I_N)\right) = r_1 = \dim\left(\text{Ker}\left((M-I_N)^{r_1}\right)\right) < +\infty$, on a donc $\text{Ker}\,(M-I_N) \subset \text{Ker}\left((M-I_N)^{r_1}\right)$. Le théorème de décomposition des noyaux fournit alors comme à la question précédente

$$\mathbb{C}^N = \text{Ker}\,(M-I_N) \oplus \text{Ker}\left((M-\lambda_2 I_N)^{r_2}\right) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}\left((M-\lambda_p I_N)^{r_p}\right).$$

Ensuite, avec les notations précédentes, puisque $F_1 = \text{Ker}\,(f_1 - \text{Id}_{F_1})$, on a $f_1 - I_{F_1} = 0$ puis $N_1 = 0$.

Ensuite, comme à la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P^{-1}M^kP = \begin{pmatrix} I_{r_1}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{r_2} + N_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (\lambda_p I_{r_p} + N_p)^k \end{pmatrix}.$$

Mais alors, la suite $\left(P^{-1}M^kP\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\text{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r_1}, 0\ldots,0)$ puis

$$\lim_{k\to+\infty} M^k = P\,\text{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r_1}, 0\ldots,0)\,P^{-1}.$$

d) Soit $k \geqslant 2$. Soit $x \in \text{Ker}\left((M-\lambda_k I_N)^{r_k}\right)$. Puisque les matrices $M - I_N$ et $(1-\lambda_k)\,I_N$ commutent

$$0 = (M-\lambda_k I_N)^{r_k}\,x = (M - I_N + (1-\lambda_k)\,I_N)^{r_k}\,x = \left(\sum_{i=0}^{r_k} \binom{r_k}{i} (1-\lambda_k)^{r_k - i} (M-I_N)^i\right) x$$

puis, en tenant compte de $r_k \geqslant 1$ et $\lambda_k \neq 1$,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{(1-\lambda_k)^{r_k}}(M - I_N)\left(\sum_{i=1}^{r_k}\binom{r_k}{i}(1-\lambda_k)^{r_k - i}(M-I_N)^{i-1}\right)x \\ &= (M-I_N)\left(\sum_{i=1}^{r_k} -\binom{r_k}{i}(1-\lambda_k)^{-i}(M-I_N)^{i-1}\right)x \in \operatorname{Im}(M-I_N). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![2,p]\!]$, $\operatorname{Ker}\left((M-\lambda_k I_{r_k})^{r_k}\right) \subset \operatorname{Im}(M-I_N)$ puis

$$\operatorname{Ker}\left((M-\lambda_2 I_{r_2})^{r_2}\right) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}\left((M-\lambda_p I_{r_p})^{r_p}\right) \subset \operatorname{Im}(M-I_N).$$

De plus, d'après la question 8)b) et le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Im}(M-I_N)) = N - \dim(\operatorname{Ker}(M-I_N)) = \sum_{k=2}^{p}\dim\left(\operatorname{Ker}\left((M-\lambda_2 I_{r_2})^{r_2}\right)\right).$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}\left((M-\lambda_2 I_{r_2})^{r_2}\right) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}\left((M-\lambda_p I_{r_p})^{r_p}\right) = \operatorname{Im}(M-I_N)$.

Mais alors, $\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r_1},0\ldots,0)$ est la matrice, dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^N = \operatorname{Ker}(M-I_N) \oplus \operatorname{Im}(M-I_N)$, de la projection sur $\operatorname{Ker}(M-I_N)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(M-I_N)$.

e) D'après tout ce qui précède, la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les valeurs propres de M distinctes de 1 sont de module strictement inférieur à 1 et de plus 1 est d'ordre de multiplicité $r = \dim(\operatorname{Ker}(M-I_N))$ (y compris dans le cas $r = 0$, cas où 1 n'est pas valeur propre).

Dans ce cas, la limite L « est » la projection sur $\operatorname{Ker}(M-I_N)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(M-I_N)$.

