Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques

Partie I. Intégrales dépendant d'un paramètre

1) *Calcul de l'intégrale* $J(0)$

Soit $a > 0$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$, intégrale convergente égale à $\sqrt{\pi}$, on effectue le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\sqrt{a\pi}}$ ou encore $u = t\sqrt{a\pi}$ puis $du = \sqrt{a\pi}\,dt$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{a\pi}}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, strictement croissante et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On sait que l'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature, c'est-à-dire convergente, puis

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\sqrt{a\pi}\,dt = \sqrt{a\pi}\,J(0).$$

Donc, $J(0)$ est une intégrale convergente ou encore, puisque la fonction $t \mapsto e^{-\pi a t^2}$ est positive, la fonction $t \mapsto e^{-\pi a t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et de plus $J(0) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

2) *Calcul de l'intégrale* $J(x)$ *et d'une intégrale associée*

a) Soient $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-\pi a t^2}e^{i\pi x t}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$. Ensuite, pour tout réel t,

$$\left|e^{-\pi a t^2}e^{i\pi x t}\right| = e^{-\pi a t^2}\left|e^{i\pi x t}\right| = e^{-\pi a t^2}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-\pi a t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction $t \mapsto e^{-\pi a t^2}e^{i\pi x t}$. On en déduit la convergence de l'intégrale égale à $J(x)$.

b) Soit $a > 0$. Soit $A > 0$.

On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} [-A, A] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (x, t) & \mapsto & e^{-\pi a t^2}e^{i\pi x t} \end{array}$ de sorte que, pour tout $x \in [-A, A]$, $J(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)\,dt$.

Φ admet sur $[-A, A]\times]-\infty, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A]\times]-\infty, +\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = i\pi t e^{-\pi a t^2}e^{i\pi x t}.$$

Ensuite, pour $(x, t) \in [-A, A]\times]-\infty, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right| = \pi|t|e^{-a t^2} = \varphi_1(t)$. La fonction φ_1 est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$, paire. De plus, $t^2\varphi_1(t) = \pi|t|^3e^{-\pi a t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ (d'après un théorème de croissances comparées et puisque $a > 0$) et donc $\varphi_1(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par suite, la fonction φ_1 est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ puis sur un voisinage de $-\infty$ par parité. Finalement, la fonction φ_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi,

- Pour chaque $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ (d'après a)),
- Φ admet sur $[-A, A]\times]-\infty, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A]\times]-\infty, +\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = i\pi t e^{-\pi a t^2}e^{i\pi x t}.$$

De plus,

- pour tout $x \in [-A, A]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$,
- pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[-A, A]$,
- il existe une fonction φ_1 continue par morceaux, positive et intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ telle que pour tout $(x, t) \in [-A, A]\times]-\infty, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction J est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$,

$$J \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout réel } x,\ J'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\pi t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\, dt.$$

c) Soient $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{2a}e^{-\pi a t^2}$ et $t \mapsto e^{i\pi x t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[-A, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} i\pi t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\, dt &= i\left(\left[-\frac{1}{2a}e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\right]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A}\left(-\frac{1}{2a}e^{-\pi a t^2}\right)\left(i\pi x e^{i\pi x t}\right) dt\right)\\ &= -\frac{i}{2a}e^{-\pi a A^2}\left(e^{i\pi x A} - e^{-i\pi x A}\right) - \frac{\pi x}{2a}\int_{-A}^{A} e^{-at^2} e^{i\pi x t}\, dt\ (*).\end{aligned}$$

Ensuite, pour $A > 0$, $\left|-\dfrac{i}{2a}e^{-\pi a A^2}\left(e^{i\pi x A} - e^{-i\pi x A}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{2A}e^{-\pi a A^2}\left(\left|e^{i\pi x A}\right| + \left|e^{-i\pi x A}\right|\right) = \dfrac{e^{-\pi a A^2}}{A}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{e^{-\pi a A^2}}{A} = 0$ et donc $\lim\limits_{A \to +\infty} -\dfrac{i}{2a}e^{-\pi a A^2}\left(e^{i\pi x A} - e^{-i\pi x A}\right) = 0$.

Quand A tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient (au vu de la convergence des différentes intégrales), $J'(x) = -\dfrac{\pi x}{2a}J(x)$. La fonction J est donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \dfrac{\pi x}{2a}y = 0$ vérifiant de plus $J(0) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

d)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ J'(x) + \frac{\pi x}{2a}J(x) = 0 &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{\pi x^2}{4a}}J'(x) + \frac{\pi x}{2a}e^{\frac{\pi x^2}{4a}}J(x) = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^{\frac{\pi x^2}{4a}}J\right)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{\pi x^2}{4a}}J(x) = e^0 J(0)\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \frac{e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}}{\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale égale à $K(x)$: pour tout réel x,

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\cos(\pi x t)\, dt = \mathrm{Re}(J(x)) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

■ Partie II. Etude de la somme d'une série

3) *Etude d'une fonction auxiliaire*

a) Pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, $\dfrac{g(x) - g(0)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \times \dfrac{x}{\sin(\pi x)}$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$ et $\dfrac{x}{\sin(\pi x)} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{\pi x} = \dfrac{1}{\pi}$.
Finalement, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \dfrac{g'(0)}{\pi}$. On pose $h(0) = \dfrac{g'(0)}{\pi}$ (on note encore h le prolongement).
La fonction h ainsi définie sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ est continue sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ en vertu de théorèmes généraux (car pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, $\pi x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ puis $\sin(\pi x) \neq 0$) et en 0 par définition de $h(0)$. Finalement, la fonction h est continue sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

b) La fonction h est de classe C^1 sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ et pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$,

$$h'(x) = \frac{g'(x)\sin(\pi x) - (g(x) - g(0))\pi\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

Ensuite, puisque g' est dérivable en 0, g' admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et puisque g est deux fois dérivable en 0, g admet en 0 un développement limité d'ordre 2, son développement de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
g'(x)\sin(\pi x) - (g(x)-g(0))\pi\cos(\pi x) &\underset{x\to 0}{=} \left(g'(0)+xg''(0)+o(x)\right)\left(\pi x + o\left(x^2\right)\right) - \left(xg'(0)+\frac{g''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\pi\left(1+o(x)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} (\pi g'(0)-\pi g'(0))x + \left(\pi g''(0) - \pi\frac{g''(0)}{2}\right)x^2 + o\left(x^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\pi g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Par suite, $h'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\dfrac{\pi g''(0)}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{\pi^2x^2+o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{g''(0)}{2\pi}+o(1)$. Finalement, $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = \dfrac{g''(0)}{2\pi}$.

c) Ainsi, h est continue sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$ et h' a une limite réelle quand x tend vers 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, h est de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. En particulier, h est dérivable en 0 et $h'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x) = \dfrac{g''(0)}{2\pi}$.

4) *Calcul d'une somme trigonométrique*

a) Soit $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$. Montrons par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\cos(2\pi nx) = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

- On rappelle que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b)$.

$$\begin{aligned}
\sin(\pi x)\left(1+2\sum_{n=1}^{1}\cos(2\pi nx)\right) &= \sin(\pi x)(1+2\cos(2\pi x)) = \sin(\pi x)+2\sin(\pi x)\cos(2\pi x) \\
&= \sin(\pi x)+\sin(2\pi x+\pi x)-\sin(2\pi x-\pi x) = \sin(3\pi x)
\end{aligned}$$

puis, puisque $\sin(\pi x)\neq 0$ car $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$, $1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{1}\cos(2\pi nx) = \frac{\sin(3\pi x)}{\sin(\pi x)}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $p=1$.

- Soit $p\geqslant 1$. Supposons que $1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\cos(2\pi nx) = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$. Alors

$$\begin{aligned}
1+2\sum_{n=1}^{p+1}\cos(2\pi nx) &= 1+2\sum_{n=1}^{p}\cos(2\pi nx)+2\cos((2p+2)\pi x) \\
&= \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}+2\cos((2p+2)\pi x) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{\sin((2p+1)\pi x)+2\sin(\pi x)\cos((2p+2)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin((2p+1)\pi x)+\sin((2p+3)\pi x)-\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \\
&= \frac{\sin((2p+3)\pi x)}{\sin(\pi x)}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\cos(2\pi nx) = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

Quand x tend vers 0, le membre de gauche de l'égalité précédente tend vers $2p+1$. D'autre part, $\dfrac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(2p+1)\pi x}{\pi x} = 2p+1$. Donc, l'égalité précédente « se prolonge par continuité en 0 ».

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$ est continue sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ et se prolonge par continuité en 0. On en déduit l'existence de l'intégrale proposée.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2n\pi x)\right)\, dx = 1 + 2\sum_{n=1}^{p} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2n\pi x)\, dx \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{p} \left[\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)}{2n\pi} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $p = 0$.

5) *Convergence et somme de la série* $\sum a_n(g)$

a) Soit $p \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2n\pi x)\right) g(x)\, dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (g(0) + g(x) - g(0))\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\, dx \\ &= g(0)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (g(x) - g(0))\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\, dx \\ &\text{(car les deux intégrales convergent)} \\ &= g(0) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (g(x) - g(0))\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\, dx \text{ (d'après 4)b))} \\ &= g(0) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\sin((2p+1)\pi x)\, dx\ (*).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0(g) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{p} a_n(g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2n\pi x)\right) g(x)\, dx = g(0) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\sin((2p+1)\pi x)\, dx$.

b) Vérifions maintenant que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\sin((2p+1)\pi x)\, dx = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction h est de classe C^1 sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ d'après la question 3)c) et la fonction $x \mapsto -\dfrac{\cos((2p+1)\pi x)}{(2p+1)\pi}$ est de classe C^1 sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\sin((2p+1)\pi x)\, dx &= \left(\left[h(x) \times -\frac{\cos((2p+1)\pi x)}{(2p+1)\pi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{(2p+1)\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h'(x) \times \frac{\cos((2p+1)\pi x)}{(2p+1)\pi}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{(2p+1)\pi}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) h\left(\frac{1}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} + p\pi\right) h\left(-\frac{1}{2}\right) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h'(x)\cos((2p+1)\pi x)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{(2p+1)\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h'(x)\cos((2p+1)\pi x)\, dx,\end{aligned}$$

puis $\displaystyle\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\sin((2p+1)\pi x)\, dx\right| \leqslant \frac{1}{(2p+1)\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |h'(x)||\cos((2p+1)\pi x)|\, dx \leqslant \frac{1}{(2p+1)\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |h'(x)|\, dx$.

$\dfrac{1}{(2p+1)\pi}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|h'(x)|\,dx$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}h(x)\sin((2p+1)\pi x)\,dx$ d'après le théorème des gendarmes. Mais alors, d'après $(*)$, la série de terme général $a_n(g)$, $n\in\mathbb{N}$, converge et quand p tend vers $+\infty$, on obtient

$$a_0(g)+2\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(g)=g(0).$$

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

6) *Propriétés de la fonction* g_a

a) Soit $a>0$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $f_a(x-k)=e^{-\pi a(x-k)^2}$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $k^2f_a(x-k)=e^{-\pi a(x-k)^2+2\ln(k)}$. Puisque $a>0$, $-\pi a(x-k)^2+2\ln(k)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\pi ak^2$ et donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}e^{-\pi a(x-k)^2+2\ln(k)}=0$ puis $f_a(x-k)\underset{k\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On en déduit la convergence de la série de terme général $f_a(x-k)$, $k\in\mathbb{N}^*$. De même, la série de terme général $f_a(x+k)$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge.

b) Soit $a>0$. La fonction g_a est donc définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}g_a(x+1)&=\sum_{k=1}^{+\infty}f_a(x+1-k)+f_a(x+1)+\sum_{k=1}^{+\infty}f_a(x+1+k)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_a(x-(k-1))+f_a(x+1)+\sum_{k=1}^{+\infty}f_a(x+(k+1))\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}f_a(x-k)+f_a(x+1)+\sum_{k=2}^{+\infty}f_a(x+k)=f_a(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}f_a(x-k)+\sum_{k=1}^{+\infty}f_a(x+k)\\&=g_a(x).\end{aligned}$$

Donc, la fonction g_a est définie sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

c) Soit $a>0$. Soit $A>0$. $k^2e^{-\pi ak^2}e^{2ka\pi A}=e^{-\pi ak^2+2ka\pi A+2\ln(k)}$ avec $-\pi ak^2+2ka\pi A+2\ln(k)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\pi ak^2\underset{k\to+\infty}{\to}-\infty$. Donc, $k^2e^{-\pi ak^2}e^{2ka\pi A}\underset{k\to+\infty}{=}o(1)$ puis $e^{-\pi ak^2}e^{2ka\pi A}\underset{k\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On en déduit la convergence de la série de terme général $e^{-\pi ak^2}e^{2ka\pi A}$.

Soit $A>0$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, posons $h_k(x)=f_a(x-k)$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $[-A,A]$,

$$0\leqslant h_k(x)=e^{-\pi a(x-k)^2}=e^{-\pi ak^2}\times e^{-\pi ax^2}\times e^{2\pi akx}\leqslant e^{-\pi ak^2}\times e^0\times e^{2k\pi A}$$

puis $\|h_k\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant e^{-\pi ak^2}e^{2ka\pi A}$. D'après le début de la question, la série numérique de terme général $\|h_k\|_{\infty,[-A,A]}$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge. Donc, la série de fonctions de terme général $x\mapsto f_a(x-k)$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[-A,A]$. De même, la série de fonctions de terme général $x\mapsto f_a(x+k)$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[-A,A]$.

Chaque fonction h_k, $k\in\mathbb{N}^*$, est continue sur $[-A,A]$ et la série de fonctions de terme général h_k, $k\in\mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément vers sa somme sur $[-A,A]$. Donc, la fonction $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(x-k)$ est continue sur $[-A,A]$. De même, la fonction $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(x+k)$ est continue sur $[-A,A]$. Enfin, la fonction $x\mapsto f_a(x)$ est continue sur $[-A,A]$. Mais alors, la fonction g_a est continue sur $[-A,A]$ en tant que somme de trois fonctions continues sur $[-A,A]$.

Ainsi, pour tout réel $A>0$, la fonction g_a est continue sur $[-A,A]$. On en déduit que la fonction g_a est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Soit $A>0$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. La fonction h_k est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et pour tout $x\in[-A,A]$,

$$h_k'(x)=-2\pi a(x-k)e^{-\pi a(x-k)^2}.$$

Pour tout réel x de $[-A,A]$, $|h_k'(x)|\leqslant 2\pi a(A+k)e^{-\pi ak^2}e^{2k\pi a}$ puis $\|h_k'\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant 2\pi a(A+k)e^{-\pi ak^2}e^{2k\pi a}$. Puisque $2\pi a(A+k)e^{-\pi ak^2}e^{2k\pi a}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$ quand k tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, la série de terme général $2\pi a(A+k)e^{-\pi a k^2}e^{2k\pi a}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge. Mais alors, la série de fonctions de terme général h_k' converge normalement et en particulier uniformément sur $[-A, A]$.

Ainsi,

- la série de fonctions de terme général h_k, $k \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers sa somme sur $[-A, A]$,
- chaque fonction h_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $[-A, A]$,
- la série de fonctions de terme général h_k', $k \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers sa somme sur $[-A, A]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Il en est de même de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$. Mais alors, la fonction g_a est de classe C^1 sur $[-A, A]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

Ceci étant vrai pour tout réel $A > 0$, on a montré que la fonction g_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $g_a'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_a'(x-k) + f_a'(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a'(x+k)$.

7) *La formule sommatoire de Poisson et application*

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $|f_a(x-k)\cos(2\pi n x)| = |f_a(x-k)|\,|\cos(2\pi n x)| \leqslant |f_a(x-k)| \leqslant \|h_k\|_{\infty,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ (avec les notations de la question précédente). Ceci et la question 6)c) montrent que la série de fonctions de terme général $x \mapsto f_a(x-k)\cos(2\pi n x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Ainsi,

- chacune des fonctions $x \mapsto f_a(x-k)\cos(2\pi n x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, est continue sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$,
- la série de fonctions de terme général $x \mapsto f_a(x-k)\cos(2\pi n x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers sa somme sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)\cos(2\pi n x)$ est continue et donc intégrable sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x-k)\cos(2\pi n x)\,dx$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge,
- $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)\cos(2\pi n x)\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x-k)\cos(2\pi n x)\,dx$.

De même, $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)\cos(2\pi n x)\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x+k)\cos(2\pi n x)\,dx$. Finalement,

$$\begin{aligned}
a_n(g_a) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x-k)\cos(2n\pi x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x)\cos(2n\pi x)\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x+k)\cos(2n\pi x)\,dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x+k)\cos(2n\pi x)\,dx.
\end{aligned}$$

b) Soit $a > 0$. Soit $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. En posant $t = x + k$, on obtient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_a(x+k)\cos(2n\pi x)\,dx = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f_a(t)\cos(2n\pi t - 2nk\pi)\,dt = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f_a(t)\cos(2n\pi t)\,dt$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
a_n(g_a) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f_a(t)\cos(2n\pi t)\,dt \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f_a(t)\cos(2n\pi t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f_a(t)\cos(2n\pi t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\cos(2n\pi t)\,dt.
\end{aligned}$$

D'après la question I.2)d), pour tout réel x, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\cos(\pi x t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\cos(\pi x t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}$. Donc,

$$\forall a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(g_a) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

c) Soit $a > 0$. $g_a(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(-k) + f_a(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(k) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2}$. D'autre part, $a_0(g) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g_a) = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}$. D'après la question III.6)d), la fonction g_a est de classe C^2 sur le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Mais alors, d'après la question II.5)b), $a_0(g) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g_a) = g_a(0)$. On a montré que

$$\forall a > 0,\ 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

d) Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \geqslant n$ puis $-\dfrac{\pi n^2}{a} \leqslant -\dfrac{\pi n}{a}$ et donc $e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \leqslant e^{-\frac{\pi n}{a}}$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} &\leqslant \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n}{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\pi}{a}}\right)^n \\
&= \frac{2e^{-\frac{\pi}{a}}}{\sqrt{a}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{a}}\right)} \text{ (car } 0 < e^{-\frac{\pi}{a}} < 1).
\end{aligned}$$

Quand a tend vers 0 par valeurs supérieures, $-\dfrac{\pi}{a}$ tend vers $-\infty$ puis $1 - e^{-\frac{\pi}{a}}$ tend vers 1. D'autre part, $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}}}{\sqrt{a}} = e^{-\frac{\pi}{a} - \frac{1}{2}\ln(a)}$ tend également vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Finalement, $\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{a}}}{\sqrt{a}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{a}}\right)} \underset{a\to 0,\ a>0}{=} o(1)$. D'après le théorème des gendarmes

$$\frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \underset{a\to 0,\ a>0}{=} o(1).$$

On a montré que $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} \underset{a\to 0,\ a>0}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} + o(1)$.

■ Partie IV. Application à l'étude d'une série entière

8) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \begin{cases} 1/2 \text{ si } n = 0 \\ 1 \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, de sorte que pour tout réel x, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Pour $x = 1$, la suite $(b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $R_b \geqslant 1$ mais aussi la suite $(b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (car la suite extraite $(b_{k^2})_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1) et donc $R_b \leqslant 1$. Finalement, $R_b = 1$.

On sait alors que le domaine de définition D de S vérifie $]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1]$. De plus, pour $x = 1$ ou $x = -1$, la série de terme général $b_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement. Donc, le domaine de définition de la fonction S est $]-1, 1[$.

b) En posant $t = 1 - x$ de sorte que x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si t tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(1-t)}}\\ &\underset{t\to 0,\ t>0}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t + \dfrac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)}} \underset{t\to 0,\ t>0}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{t}{2} + o\left(t\right)}}\right)\\ &\underset{t\to 0,\ t>0}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{2} + o\left(t\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \underset{t\to 0,\ t>0}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{t}{4} + o\left(t\right)\right) \underset{t\to 0,\ t>0}{=} \frac{\sqrt{t}}{4} + o\left(\sqrt{t}\right).\end{aligned}$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(1-t)}}\right) = 0$.

On pose alors $a = -\dfrac{1}{\pi}\ln(x)$ de sorte que $x = e^{-\pi a}$ et que x tend vers 1 si et seulement si a tend vers 0. D'après la question III.7)c),

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2}\right) \underset{a\to 0}{=} \frac{1}{2\sqrt{a}} + o(1) \underset{x\to 1}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln(x)}} + o(1)\\ &\underset{x\to 1}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} + o(1) \text{ (d'après le début de la question).}\end{aligned}$$

c) Mais alors,

$$S\left(x^4\right) \underset{x\to 1}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x^4}} + o(1) \underset{x\to 1}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(1-x)\left(1+x+x^2+x^3\right)}} + o(1)$$

Ensuite, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2+x^3}}$ est dérivable en 1 et donc admet en 1 un développement limité d'ordre 1. En particulier, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2+x^3}} \underset{x\to 1}{=} \dfrac{1}{2} + o\left(\sqrt{x-1}\right)$ puis

$$S\left(x^4\right) \underset{x\to 1}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1-x}} + o(1).$$

d) Soit $x \in]-1,1[$, $S(x) + S(-x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + (-1)^{k^2}\right)x^{k^2}$. Maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, k^2 a la parité de k et donc, si k est impair, $1 + (-1)^{k^2} = 0$. Par suite,

$$S(x) + S(-x) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(1 + (-1)^{(2p)^2}\right)x^{(2p)^2} = 1 + 2\sum_{p=1}^{+\infty}\left(x^4\right)^p = 2S\left(x^4\right).$$

Mais alors,

$$S(x) = 2S\left(x^4\right) - S(-x) \underset{x\to -1}{=} 2\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+x}} + o(1) \underset{x\to -1}{=} o(1).$$

