Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

---

0) *Préliminaire : l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité*

a) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = z\overline{z}+z'\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z'} = |z|^2+2\mathrm{Re}\,(z'\overline{z})+|z'|^2\\ &\leqslant |z|^2+2\,|\mathrm{Re}\,(z'\overline{z})|+|z'|^2\\ &\leqslant |z|^2+2\,|z'\overline{z}|+|z'|^2 = |z|^2+2|z|\left|\overline{z'}\right|+|z'|^2 = |z|^2+2|z||z'|+|z'|^2 = (|z|+|z'|)^2,\end{aligned}$$

puis $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$. Donc, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

b) De plus, on a l'égalité si et seulement chaque inégalité écrite est une égalité. Donc,

$$\begin{aligned}|z+z'| = |z|+|z'| &\leftrightarrow |z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z'\overline{z}) = |\mathrm{Re}\,(z'\overline{z})| \text{ et } |\mathrm{Re}\,(z'\overline{z})| = |z'\overline{z}|\\ &\Leftrightarrow z'\overline{z} \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{Re}\,(z'\overline{z}) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow z'\overline{z} \in \mathbb{R}^+\\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} \in \mathbb{R}^+\right) \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}^+\right)\\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \exists \mu \in \mathbb{R}^+/\ \frac{z'}{z} = \mu\right)\\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \exists \mu \in \mathbb{R}^+/\ z' = \mu z.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'| = |z|+|z'| \Leftrightarrow z=0$ ou $\exists \mu \in \mathbb{R}^+/\ z' = \mu z$.

1) *Existence d'un minimum absolu de la fonction* f *sur le plan*

a) On sait que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z-z'| \geqslant |z|-|z'|$. Donc, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z-z_k| \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z| - \sum_{k=0}^{n-1} |z_k| = n|z| - \sum_{k=0}^{n-1} |-z_k| = n|z| - f(0).$$

$\lim\limits_{|z|\to+\infty} n|z|-f(0) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = +\infty$. D'autre part, si $|z| > \dfrac{2f(0)}{n}$, alors $f(z) > n\dfrac{2f(0)}{n} - f(0) = f(0)$.

b) La boule fermée de centre 0 et de rayon $\dfrac{2f(0)}{n}$, notée B, est un fermé borné de $\mathbb{C}$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donc, B est un compact de $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue. Puisque f est continue sur le compact B à valeurs dans $\mathbb{R}$, f admet sur B un minimum m (et un maximum).

Par définition de B, pour $z \in B$, $f(z) \geqslant m$ et pour $z \notin B$, $f(z) > f(0) \geqslant m$. Finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \geqslant m$. m est donc un minimum absolu. Enfin, si ω ne est un élément de B tel que $m = f(\omega) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |\omega - z_k|$. Puisque $n-1 \geqslant 2$ et que les z_k sont deux à deux distincts, l'un au moins des modules est strictement positif et donc $m > 0$.

2) *Unicité du point* Ω *où la fonction* f *réalise son minimum*

a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tel que $z \neq z'$ et $\lambda \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}f_k(\lambda z+(1-\lambda)z') &= |\lambda z+(1-\lambda)z'-z_k| = |\lambda z+(1-\lambda)z'-(\lambda+1-\lambda)z_k| = |\lambda\,(z-z_k)+(1-\lambda)\,(z'-z_k)|\\ &\leqslant |\lambda|\,|z-z_k|+|1-\lambda|\,|z'-z_k| = \lambda f_k(z)+(1-\lambda)f_k(z').\end{aligned}$$

De plus, d'après la question 0)b), on a l'égalité si et seulement si ou bien $\lambda\,(z-z_k) = 0$, ou bien $\lambda\,(z-z_k) \neq 0$ et $\exists \mu \geqslant 0/\ (1-\lambda)\,(z'-z_k) = \mu\lambda\,(z-z_k)$ ou encore, on a l'égalité si et seulement $z = z_k$ ou $z \neq z_k$ et $\overrightarrow{M_kM'} = \dfrac{\lambda\mu}{1-\lambda}\overrightarrow{M_kM}$. Dans tous les cas, les points M, M' et M_k, d'affixes respectives z, z' et z_k sont alignés.

b) Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tel que $z \neq z'$ et $\lambda \in]0, 1[$. On additionne membre à membre les inégalités précédentes et on obtient

$$f(\lambda z + (1-\lambda)z') = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\lambda z + (1-\lambda)z') \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} f_k(z) + (1-\lambda)\sum_{k=1}^{n} f_k(z') = \lambda f(z) + (1-\lambda)f(z').$$

De plus, si on a l'égalité, chacune des inégalités $f_k(\lambda z + (1-\lambda)z') \leqslant \lambda f_k(z) + (1-\lambda)f_k(z')$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, est une égalité. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les points M, M' et M_k sont alignés. Puisque M et M' sont distincts, ceci impose le fait que les points M_0, M_1, ..., M_{n-1} sont alignés sur la droite (MM') ce qui est exclu par l'énoncé. Donc

$$f(\lambda z + (1-\lambda)z') < \lambda f(z) + (1-\lambda)f(z').$$

c) D'après la question précédente, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $f(\lambda\omega + (1-\lambda)\omega') < \lambda f(\omega) + (1-\lambda)f(\omega') = \lambda m + (1-\lambda)m = m$. En particulier, $f\left(\dfrac{\omega + \omega'}{2}\right) < m$ ce qui contredit le fait que m est le minimum de f. Donc, $\omega = \omega'$.

On a montré que f admet un minimum global sur $\mathbb{C}$, minimum atteint en une unique point Ω.

d)

1. On suppose dans cette question que l'ensemble $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ est stable par la symétrie orthogonale par rapport à une certaine droite Δ. Supposons par l'absurde que $\Omega \notin \Delta$. Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à Δ. Puisque $\Omega \notin \Delta$, $\Omega' \neq \Omega$.

Puisque $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ est stable par s_Δ et qu'une symétrie orthogonale est une bijection du plan sur lui-même, il existe une permutation σ de $[\![0, n-1]\!]$ telle que $(s_\Delta(M_0), s_\Delta(M_1), \dots, s_\Delta(M_{n-1})) = \left(M_{\sigma(0)}, M_{\sigma(1)}, \dots, M_{\sigma(n-1)}\right)$. Puisqu'une symétrie orthogonale est une isométrie,

$$f(\Omega') = \sum_{k=0}^{n-1} \Omega' M_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_\Delta(\Omega')s_\Delta(M_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \Omega M_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \Omega M_k = f(\Omega).$$

Ceci contredit l'unicité de Ω et on a donc montré par l'absurde que $\Omega \in \Delta$.

2. Le même raisonnement s'applique en remplaçant s_Δ par s_I et en supposant par l'absurde que Ω n'est pas le point I.

On suppose de plus que $n = 4$ et que $M_0M_1M_2M_3$ est un parallélogramme. On a alors $z_1 - z_0 = z_2 - z_3$ et $\omega = \dfrac{z_0 + z_2}{2} = \dfrac{z_1 + z_3}{2}$ puis

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \left|z_0 - \frac{z_0 + z_2}{2}\right| + \left|z_1 - \frac{z_1 + z_3}{2}\right| + \left|z_2 - \frac{z_0 + z_2}{2}\right| + \left|z_3 - \frac{z_1 + z_3}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(2|z_2 - z_0| + 2|z_3 - z_1|\right) \\ &= M_0M2 + M_1M_3. \end{aligned}$$

Le minimum de f est la somme des longueurs des diagonales du parallélogramme $M_0M_1M_2M_3$.

3. Le même raisonnement s'applique en remplaçant s_Δ par $r_{I,\theta}$ et en supposant par l'absurde que Ω n'est pas le point I.

On suppose de plus que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Dans ce cas, $\omega = 0$ et le minimum de f est

$$f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_k| = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

3) *Expression du gradient de la fonction* f

a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le singleton $\{M_k\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (boule fermée de centre M_k et de rayon 0) puis $\{M_0, \dots, M_k\} = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \{M_k\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant que réunion finie de fermés de $\mathbb{R}^2$. Mais alors, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{M_0, \dots, M_k\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que complémentaire d'un fermé de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $(x, y) \in U$, $(x - x_k)^2 + (y - y_k)2 > 0$ et donc f_k admet sur U des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables. De plus, pour tout $(x, y) \in U$,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y) = \frac{x - x_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}} \text{ et } \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y) = \frac{y - y_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}}.$$

Ensuite, les deux fonctions $\dfrac{\partial f_k}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f_k}{\partial y}$ sont continues sur U en tant que quotient de fonctions continues sur U dont le dénominateur ne s'annule pas sur U. Donc, f_k est de classe C^1 sur U.

Le gradient de f_k en $(x, y) \in U$ est le vecteur de coordonnées $\left(\dfrac{\partial f_k}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f_k}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\dfrac{x-x_k}{|z-z_k|}, \dfrac{y-y_k}{|z-z_k|}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne canonique ce qui est le cas). L'affixe de ce vecteur est $\dfrac{(x-x_k)+i\,(y-y_k)}{|z-z_k|} = \dfrac{z-z_k}{|z-z_k|}$.

c) $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_k$ est de classe C^1 sur U en tant que somme de fonctions de classe C^1 sur U. Le gradient de f en $z = x+iy \in U$ est la somme des gradients des f_k :

$$\forall (x,y) \in U,\ \nabla f(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z-z_k}{|z-z_k|}.$$

4) *Recherche de l'unique point Ω où la fonction f admet son minimum*

a) Si f atteint son minimum en l'un des M_k, il n'y a plus rien à dire. Sinon, f atteint son minimum m en un point Ω de U. Puisque f est de classe C^1 sur U qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on sait que ce point est un point critique de f c'est-à-dire un point en lequel le gradient de f est nul. Si z est l'affixe de Ω, z est un élément de U tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z-z_k}{|z-z_k|} = 0.$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |c-z_k| &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|c-z_k|^2}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{c}-\overline{z_k}\right)\frac{c-z_k}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{c}-\overline{z}+\overline{z}-\overline{z_k}\right)\frac{c-z_k}{|c-z_k|} \\ &= \left(\overline{c}-\overline{z}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c-z_k}{|c-z_k|} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{z}-\overline{z_k}\right)\frac{c-z_k}{|c-z_k|} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{z-z_k}\right)\frac{c-z_k}{|c-z_k|}.\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

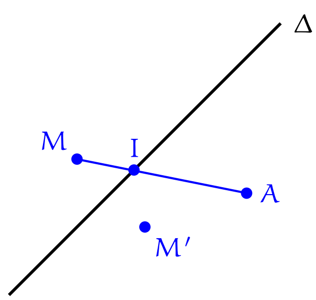
$$f(c) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z-z_k}\frac{c-z_k}{|c-z_k|} \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z-z_k}\frac{c-z_k}{|c-z_k|}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\overline{z-z_k}\right| \frac{|c-z_k|}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} |z-z_k| = f(z).$$

f réalise donc son minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ en le point C ou encore $C = \Omega$ par unicité de Ω.

c) Ainsi, ou bien l'équation (E) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z-z_k}{|z-z_k|} = 0$ n'a pas de solution dans U et dans ce cas, f atteint nécessairement son minimum en l'un des M_k d'après la question a), ou bien l'équation (E) admet une solution c dans U et d'après b), f atteint son minimum en c et c est l'unique solution de (E) dans U.

5) *Localisation du point Ω dans le cas d'un polygone convexe*

a)



Puisque A et M sont de part et d'autre de Δ, I est bien défini puis puisque $I \in [AM]$, $AM = AI + IM$. Puisque Δ est la médiatrice du segment $[MM']$ et que $I \in \Delta$, $IM = IM'$ puis $AM = AI + IM'$. Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$AM' \leqslant AI + IM' = AM.$$

b) Supposons par l'absurde de Ω soit strictement à l'extérieur du polygone. Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que Ω ne soit pas du bon côté de la droite (M_iM_{i+1}) (en posant $M_n = M_0$). Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à la droite $\Delta = (M_iM_{i+1})$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, si $M_k \notin (M_iM_{i+1})$, les points Ω' et M_k sont de l'autre côté de Δ par rapport à M_k et les trois points ne sont pas sur Δ. D'après la question précédente, $\Omega'M_k \leqslant \Omega M_k$. Sinon, $\Omega'M_k = \Omega M_k$. Mais alors,

$$f(\Omega') = \sum_{k=0}^{n-1} \Omega'M_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \Omega M_k = f(\Omega)$$

puis $f(\Omega') = f(\Omega)$ par définition de Ω puis $\Omega' = \Omega$ par unicité de Ω. Ceci est une contradiction et donc Ω est à l'intérieur du polygone, bord compris.

6) *Etude d'un exemple*

a) La droite $\Delta = (OA)$ est un axe symétrie du triangle ABC. D'après la question 2)d), le point Ω appartient à la droite Δ. De plus, ABC est un polygone convexe et d'après la question 5)b), Ω est à l'intérieur du triangle ABC, bord compris. Finalement le point Ω appartient au segment $[OA]$.

b) Pour $t \in [0, 1]$,

$$f(M_t) = |it - x| + |it - i| + |it + x| = 1 - t + 2\sqrt{t^2 + x^2} = g(t).$$

La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel $t \in [0, 1], g'(t) = -1 + 2\dfrac{t}{\sqrt{t^2 + x^2}}$. Pour $t \in [0, 1]$,

$$\operatorname{sgn}(g'(t)) = \operatorname{sgn}\left(2t - \sqrt{t^2 + x^2}\right) = \operatorname{sgn}\left(4t^2 - \left(t^2 + x^2\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(t - \frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

Si $x \geqslant \sqrt{3}$, g' est négative sur $[0, 1]$ puis g est décroissante sur $[0, 1]$. Mais alors, la fonction g atteint son minimum en 1 et ce minimum est $f(A) = 2\sqrt{1 + x^2}$. Dans ce cas, le minimum de f est atteint en A.

Sinon, $0 < x < \sqrt{3}$. Dans ce cas, g atteint son minimum en $t = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ et donc f atteint son minimum en le point $\Omega\left(0, \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

Dans tous les cas, f atteint son minimum en $\Omega\left(0, \operatorname{Min}\left\{\dfrac{x}{\sqrt{3}}, 1\right\}\right)$.

c) D'après la question précédente, $\Omega = A \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{3}$. Notons θ la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ (et non pas $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$) qui appartient à $]-\pi, \pi]$. On sait que

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(x-0)(-x-0) + (0-1)(0-1)}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(-x-0)(0-1) - (x-0)(0-1)}{x^2+1} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Ensuite, $x \geqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 \geqslant 3 \Leftrightarrow 1 + x^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + \dfrac{2}{1+x^2} \leqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\theta) \leqslant -\dfrac{1}{2}$. De plus, pour $x > \sqrt{3}$, $\sin(\theta) = \dfrac{2x}{x^2+1} > 0$.

Donc, $\Omega = A \Leftrightarrow \cos(\theta) \leqslant -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

