Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques.

Exercice I - Une caractérisation de la loi géométrique

1) $I = \frac{1}{2}(X + Y - |X - Y|)$ et $M = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|)$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

2) (a) $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^{k-1}$.

D'abord, $I(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $\{I = k\}$ est la réunion disjointe des trois événements $\{X = k\} \cap \{Y = k\}$, $\{X = k\} \cap \{Y > k\}$ et $\{X > k\} \cap \{Y = k\}$. Par indépendance des lois et symétrie des rôles de X et Y,

$$\begin{aligned} P(I = k) &= P(X = k) \times P(Y = k) + P(X = k) \times P(Y > k) + P(X > k) \times P(Y = k) \\ &= (P(X = k))^2 + 2P(X = k) \times P(Y > k). \end{aligned}$$

$P(Y > k) = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} P(Y = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} = pq^k \frac{1}{1-q} = q^k$. Donc,

$$P(I = k) = \left(pq^{k-1}\right)^2 + 2pq^{k-1} \times q^k = pq^{2k-2}(p + 2q) = p(2 - p)\left(q^2\right)^{k-1} = \left(2p - p^2\right)\left(1 - \left(2p - p^2\right)\right)^{k-1}.$$

Donc, la variable I suit la loi géométrique de paramètre $p' = p(2 - p)$.

(b) L'événement $\{D = 0\}$ est l'événement $\{M = I\}$ ou encore l'événement $\{X = Y\}$. Mais alors, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $\{(I = i) \cap (D = 0)\} = \{X = Y = i\}$. Dans ce cas, par indépendance,

$$P(I = i, D = 0) = P((X = i) \cap (Y = i)) = (P(X = i))^2 = p^2 q^{2i-2}.$$

Soient maintenant $d \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}^*$. $\{D = d\} \cap \{I = i\} = ((X = i) \cap (Y = i + d)) \cup ((X = i + d) \cap (Y = i))$ puis, ces événements étant disjoints,

$$P(I = i, D = d) = 2P((X = i) \cap (Y = i + d)) = 2P(X = i)P(Y = i + d) = 2pq^{i-1}pq^{i+d-1} = 2p^2 q^{d+2i-2}.$$

En résumé,

$$\forall (i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ P(I = i, D = d) = \begin{cases} p^2 q^{2i-2} \text{ si } d = 0 \\ 2p^2 q^{d+2i-2} \text{ si } d > 0 \end{cases}.$$

(c) $D(\Omega) = \mathbb{N}$. Ensuite, $(I = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ étant un système complet d'événements,

$$P(D = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(I = i, D = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 q^{2i-2} = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2 - p},$$

et pour $d \geqslant 1$,

$$P(D = d) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(I = i, D = d) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2p^2 q^{d+2i-2} = 2p^2 q^d \frac{1}{1 - q^2} = \frac{2pq^d}{2 - p}.$$

En résumé,

$$\forall d \in \mathbb{N},\ P(D = d) = \begin{cases} \dfrac{p}{2 - p} \text{ si } d = 0 \\ \dfrac{2pq^d}{2 - p} \text{ si } d \geqslant 1 \end{cases}.$$

(d) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, $P(I = i, D = 0) = p^2 q^{2i-2}$ et, d'après la question 2)a),

$$P(I = i) \times P(D = 0) = p(2 - p)q^{2i-2} \times \frac{p}{2 - p} = p^2 q^{2i-2}.$$

Donc, $P(I=i, D=0) = P(I=i) \times P(D=0)$. Ensuite, pour $(i,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P(I=i, D=d) = 2p^2q^{d+2i-2}$ et d'autre part

$$P(I=i) \times P(D=d) = p(2-p)q^{2i-2} \times \frac{2pq^d}{2-p} = 2p^2q^{d+2i-2}.$$

Dans ce cas aussi, $P(I=i, D=d) = P(I=i) \times P(D=d)$.

En résumé, $\forall (i,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $P(I=i, D=d) = P(I=i) \times P(D=d)$. Les variables I et D sont donc indépendantes.

3) (a) Par indépendance, $b = P(D=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X=k) \cap (Y=k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^2$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $(I > k) = (X > k) \cap (Y > k)$ puis, par indépendance,

$$P(I > k) = (P(X > k)) \times P(Y > k) = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(I > k, D = 0) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P((X=i) \cap (Y=i)) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} (P(X=i))^2 = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2$ mais puisque I et D sont indépendantes, on a aussi

$$P(I > k, D = 0) = P(I > k) \times P(D=0) = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

(d) i. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
p_k^2 = \sum_{i=k}^{+\infty} p_i^2 - \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 &= b\left(\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i\right)^2 - \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2\right) \\
&= b\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i - \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i + \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right) \\
&= bp_k\left(p_k + 2\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right) = bp_k\left(p_k + 2P(X > k)\right)
\end{aligned}$$

puis (puisque $p_k \neq 0$), $p_k = b\left(p_k + 2P(X > k)\right)$ puis $p_k(1-b) = 2bP(X > k)$.

ii. $(1-b)p_1 = 2bP(X > 1) = 2b\left(1 - p_1\right)$ puis $p_1 = \dfrac{2b}{1+b}$. Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(1-b)p_k - (1-b)p_{k+1} &= 2b(P(X > k) - P(X > k+1)) = 2bP((X > k) \setminus (X > k+1)) = 2bP(X = k+1) \\
&= 2bp_{k+1}
\end{aligned}$$

et donc $(1-b)p_k - (1-b)p_{k+1} = 2bp_{k+1}$ puis $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}p_k$.

(e) Ainsi, $p_1 = \dfrac{2b}{1+b}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}p_k$ avec $1 - p_1 = 1 - \dfrac{2b}{1+b} = \dfrac{1-b}{1+b}$. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = P(Y=k) = p_1\left(1-p_1\right)^{k-1}.$$

X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p_1.

Exercice 2 - Un calcul de $\zeta(2)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos^{2n-1}(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{2n-1}(x)\ dx = \left[\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times (2n-1)(-\sin(x))\cos^{2n-2}(x)\ dx \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\ dx \ (\cos^{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ car } 2n-1>0) \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{2n-2}(x)\ dx = (2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\ dx\right) \\
&= (2n-1)\left(C_{n-1} - C_n\right).
\end{aligned}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au passage, on a obtenu $C_n = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\ dx$ et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\ dx = \frac{C_n}{2n-1}.$$

Ensuite,

$$C_n = (2n-1)\left(C_{n-1} - C_n\right) \Rightarrow (2n)C_n = (2n-1)C_{n-1} \Rightarrow \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

et finalement, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\ dx = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une double intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n}(x)\ dx = \left[x\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(2n)(-\sin(x))\cos^{2n-1}(x)\ dx = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\ dx \\
&= 2n\left(\left[\frac{x^2}{2}\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2}\left(\cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\right) dx\right) \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(-\cos^{2n}(x) + (2n-1)\left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{2n-2}(x)\right) dx = n\left(-2nD_n + (2n-1)D_{n-1}\right) \\
&= n(2n-1)D_{n-1} - 2n^2D_n.
\end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. C_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $C_n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En divisant les deux membres de l'égalité précédente par C_n, on obtient

$$\begin{aligned}
1 &= n(2n-1)\frac{D_{n-1}}{C_n} - 2n^2\frac{D_n}{C_n} \\
&= n(2n)\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - 2n^2\frac{D_n}{C_n} \text{ (d'après 2))} \\
&= 2n^2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right).$$

5) (a) La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est deux fois dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée seconde, à savoir $x \mapsto -\sin(x)$ est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Son graphe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est, dans le plan rapporté à un repère, au-dessus de la corde joignant les points de son graphe de coordonnées respectives $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Cette corde a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$ (avec $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$) et on a donc montré que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
D_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)\ dx \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right)^2 \cos^{2n}(x)\ dx = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\ dx \\
&= \frac{\pi^2}{4}\frac{C_n}{2n+2} \text{ (d'après 2)).}
\end{aligned}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{D_{k-1}}{C_{k-1}} - \frac{D_k}{C_k}\right) = 2\left(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_n}{C_n}\right) \text{ (somme télescopique).}$$

Ensuite, $D_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\ dx = \frac{\pi^3}{24}$ et $C_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Donc, $2\frac{D_0}{C_0} = \frac{2\pi^3/24}{\pi/2} = \frac{\pi^2}{6}$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{D_n}{C_n}.$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{D_n}{C_n} \leqslant 2\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2} = \frac{\pi^2}{4(n+1)}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{4(n+1)} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\frac{D_n}{C_n} = 0$ et donc que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 - Trois preuves d'une égalité combinatoire

1) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $B(n,0) = \int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1}$.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
B(n,p) &= \int_0^1 t^n(1-t)^p\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^p\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times (-p)(1-t)^{p-1}\ dt \\
&= \frac{p}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{p-1}\ dt = \frac{p}{n+1}B(n+1, p-1).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
B(n,p) &= \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} \times \ldots \times \frac{1}{n+p}B(n+p,0) = \frac{p \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(n+p)\times(n+p+1)} \\
&= \frac{p!n!}{(n+p+1)!}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$. Donc,

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ B(n,p) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}.$$

(b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\frac{(m-1)!n!}{(m+n)!} &= B(m-1,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n\,dt=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{m-1}t^k\,dt\\ &=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{m+k-1}\,dt=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k}.\end{aligned}$$

2) (a) Soit $T\ :\ u=(u_p)_{p\in\mathbb{N}}\mapsto(u_{p+1})_{p\in\mathbb{N}}$. T est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta=T-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Puisque les endomorphismes T et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$\Delta^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k.$$

En appliquant cette égalité à une suite u, on obtient pour tout $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$(\Delta^n(u))_p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(T^k(u)\right)_p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_{k+p}$$

(b) En appliquant ce résultat à la suite $u=\left(\dfrac{1}{p}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$, on obtient pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{k+p}=(\Delta^n(u))_p\,.$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $(\Delta^n(u))_p=(-1)^n\dfrac{(p-1)!n!}{(n+p)!}$.

- Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $(-1)^0\dfrac{(p-1)!0!}{(0+p)!}=\dfrac{1}{p}=u_p=\left(\Delta^0(u)\right)_p$. L'égalité est vraie quand $n=0$.

- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $(\Delta^n(u))_p=(-1)^n\dfrac{(p-1)!n!}{(n+p)!}$. Alors,

$$\begin{aligned}\left(\Delta^{n+1}(u)\right)_p &= (\Delta^n(u))_{p+1}-(\Delta^n(u))_p\\ &=(-1)^n\frac{p!n!}{(n+p+1)!}-(-1)^n\frac{(p-1)!n!}{(n+p)!}\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &=(-1)^n\frac{p!n!-(n+p+1)\times(p-1)!n!}{(n+p+1)!}=(-1)^n\frac{(p-1)!n!(p-(n+p+1))}{(n+p+1)!}\\ &=(-1)^{n+1}\frac{(p-1)!(n+1)!}{(n+1+p)!}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $(\Delta^n(u))_p=(-1)^n\dfrac{(p-1)!n!}{(n+p)!}$.

On en déduit que pour $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $(-1)^n\dfrac{(p-1)!n!}{(n+p)!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{k+p}$. Après simplification par $(-1)^n$ et en tenant compte de $(-1)^{-k}=(-1)^k$ puisque les entiers k et $-k$ ont même parité, on retrouve

$$\forall(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ \frac{(p-1)!n!}{(n+p)!}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{k+p}.$$

3) (a)

$$\begin{aligned}P(B)-P\left(B\cap\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right) &= P\left(B\cap{}^c\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\right)=P\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}{}^cA_i\right)\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap{}^cA_i)\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}P\left((B\cap{}^cA_{i_1})\cap(B\cap{}^cA_{i_2})\cap\ldots\cap(B\cap{}^cA_{i_k})\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}P\left(B\cap{}^cA_{i_1}\cap{}^cA_{i_2}\cap\ldots\cap{}^cA_{i_k}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}P\left(B\cap\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)&=P(B)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}P\left(B\cap{}^cA_{i_1}\cap{}^cA_{i_2}\cap\ldots\cap{}^cA_{i_k}\right)\\&=P(B)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}P\left(B\cap{}^cA_{i_1}\cap{}^cA_{i_2}\cap\ldots\cap{}^cA_{i_k}\right).\end{aligned}$$

(b) Le nombre de $(m+n)$-listes ordonnées est $(m+n)!$ et ces listes sont équiprobables.

On commence par placer les n boules blanches : il y a $(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)=\dfrac{(m+n)!}{m!}$ placements possibles des n boules blanches et il reste alors m emplacements vides. On place la boule noire dans le premier emplacement vide puis les $m-1$ boules rouges dans les $m-1$ emplacements restants. Pour chaque placement des boules blanches, on a donc $1\times(m-1)!$ placements possibles de la boule noire et des boules rouges. Au total : $\dfrac{(m+n)!}{m!}\times(m-1)!=\dfrac{(m+n)!}{m}$. Donc,

$$P(B)=\frac{(m+n)!}{m(m+n)!}=\frac{1}{m}.$$

(c) L'événement $B\cap\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ est réalisé si et seulement si on tire successivement les n boules blanches puis la boule noire puis les $m-1$ boules rouges. Donc,

$$P\left(B\cap\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}.$$

(d) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Soit $(i_1,\ldots,i_k)$ une k-liste avec $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$. L'événement $B\cap{}^cA_{i_1}\cap\ldots\cap{}^cA_{i_k}$ est réalisé si et seulement si la boule noire est tirée avant les $m-1$ boules rouges et les k boules blanches $B_{i_1},\ldots,B_{i_k}$. On place d'abord les $n-k$ boules blanches qui ne sont pas $B_{i_1},\ldots,B_{i_k}$: $(m+n)(m+n-1)\ldots(m+k+1)=\dfrac{(m+n)!}{(m+k)!}$ possibilités. Pour chacun de ces placements, on place la boule noire dans le premier emplacement non utilisé puis les $(n+m)-(n-k+1)=m+k-1$ boules restantes. Le nombre de $(n+m)$-listes obtenues est donc $\dfrac{(m+n)!}{(m+k)!}\times(m+k-1)!=\dfrac{(m+n)!}{m+k}$ puis

$$P\left(B\cap{}^cA_{i_1}\cap\ldots\cap{}^cA_{i_k}\right)=\frac{(m+n)!}{(m+k)(m+n)!}=\frac{1}{m+k}.$$

(e) i. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Le nombre de k-listes $(i_1,\ldots,i_k)$ avec $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$ est encore le nombre de parties à k éléments de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Il y en a $\dbinom{n}{k}$.

ii. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{(m-1)!n!}{(m+n)!}&=P\left(B\cap\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\\&=P(B)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}P\left(B\cap{}^cA_{i_1}\cap{}^cA_{i_2}\cap\ldots\cap{}^cA_{i_k}\right)\\&=\frac{1}{m}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n}1\\&=\frac{1}{m}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k}.\end{aligned}$$

Exercice 4 - Une propriété des matrices symétriques

Notons $\Sigma = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) /\ {}^tXX = 1\}$. On note encore $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

1) Soient $A \in S_n(\mathbb{R}$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ puis $B = {}^tPAP \in O_n(\mathbb{R})$. Soient $X \in \Sigma$ puis $X' = {}^tPX$ de sorte que $X = PX'$. Alors,

$$ {}^tX'X' = {}^t\left({}^tPX\right)\left({}^tPX\right) = {}^tXP{}^tPX = {}^tXX = 1 $$

et donc $X' \in \Sigma$. On en déduit que

$$ {}^tXAX = {}^tXPB{}^tPX = {}^t\left({}^tPX\right)B\left({}^tPX\right) = {}^tX'BX' \in R(B). $$

Ceci montre que $R(A) = R\left(PB{}^tP\right) \subset R(B)$. En appliquant ce résultat aux matrices $B \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tP \in O_n(\mathbb{R})$, on a aussi $R(B) = R\left({}^tPAP\right) \subset R(A)$ et finalement, $R(A) = R(B)$.

2) (a) D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PD{}^tP$ où $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$. D'après la question précédente, $R(A) = R(D)$.

Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \Sigma$. On a ${}^tXDX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ et donc ${}^tXDX \leqslant \lambda_n \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n$ et de même, ${}^tXDX \geqslant \lambda_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1$. Ceci montre que $R(A) = R(D) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

(b) Si $n = 1$, $[\lambda_1, \lambda_n] = \{\lambda_1\}$. Dans ce cas, l'égalité $R(A) = R(D) = [\lambda_1, \lambda_n]$ est immédiate.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. $X_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ (resp. $X_n = (0, \ldots, 0, 1)$) est un vecteur propre unitaire de D associé à la valeur propre λ_1 (resp. λ_n). Pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, soit $X_\theta = \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_n = (\cos(\theta), 0, \ldots, 0, \sin(\theta))$.

$\|X_\theta\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$ et d'autre part, ${}^tX_\theta DX_\theta = \lambda_1\cos^2(\theta) + \lambda_n\sin^2(\theta)$. Donc,

$$ \left\{\lambda_1\cos^2(\theta) + \lambda_n\sin^2(\theta),\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \subset R(D) = R(A). $$

Mais l'application $f\ : \theta \mapsto \lambda_1\cos^2(\theta) + \lambda_n\sin^2(\theta)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et de plus, $f(0) = \lambda_1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lambda_n$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs entre λ_1 et λ_n. Ceci montre que $[\lambda_1, \lambda_n] \subset R(A)$ et finalement que

$$ R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]. $$

(c) Si $\lambda_1 > 0$, alors $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n > 0$ ce qui contredit $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Donc, $\lambda_1 \leqslant 0$. De même, $\lambda_n \geqslant 0$. On en déduit que $0 \in [\lambda_1, \lambda_n] = R(A)$.

Etudions la réciproque dans le cas $n = 3$. Soit $D = \mathrm{diag}\left(-1, 0, 2\right)$. Alors, $R(D) = [-1, 2]$ et en particulier, $0 \in R(D)$. Mais $\mathrm{Tr}(D) = 1 \neq 0$. La réciproque est fausse dans le cas $n = 3$.

3) Posons $A' = {}^tPAP$. Soit $X = (1, 0, \ldots, 0)$. $X \in \Sigma$ et ${}^tXA'X = \mathrm{Tr}(A)$. Donc, $\mathrm{Tr}(A) \in R(A') = R(A)$.

4) (a) Soit $A = I_2$. $\mathrm{Sp}(A) = (1, 1)$ puis $R(A) = \{1\}$ puis $\mathrm{Tr}(A) = 2 \notin R(A)$.

(b) Soit $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2\right) \in D_2(\mathbb{R})$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

$$ \mathrm{Tr}(D) \in R(D) \Leftrightarrow \lambda_1 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \leqslant 0 \text{ et } \lambda_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \in [\lambda_1, \lambda_2] \Leftrightarrow 0 \in R(D). $$

Soit alors $A \in S_2(\mathbb{R})$. A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle D. On a $R(A) = R(D)$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$. Mais alors

$$ \mathrm{Tr}(A) \in R(A) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(D) \in R(D) \Leftrightarrow 0 \in R(D) \Leftrightarrow 0 \in R(A). $$

5) Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \leqslant 0 \leqslant \lambda_2$ (puisque $0 \in R(A)$). A est orthogonalement semblable à $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

$$ \begin{aligned} P_\theta D{}^tP_\theta &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\cos(\theta) & -\lambda_2\sin(\theta) \\ \lambda_1\sin(\theta) & \lambda_2\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\cos^2(\theta) + \lambda_2\sin^2(\theta) & \times \\ \times & \lambda_1\sin^2(\theta) + \lambda_2\cos^2(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Montrons que l'on peut choisir $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \sin^2(\theta) + \lambda_2 \cos^2(\theta) = 0$.
Si $\lambda_1 < 0$, posons $\theta = \text{Arctan}\left(\sqrt{-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors, $\tan^2(\theta) = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ puis $\lambda_1 \sin^2(\theta) + \lambda_2 \cos^2(\theta) = 0$.
Si $\lambda_1 = 0$, le réel $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ convient.

θ étant ainsi choisi, on a $\lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta) = \lambda_1 \left(1 - \sin^2(\theta)\right) + \lambda_2 \left(1 - \cos^2(\theta)\right) = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A)$.

Ainsi, D est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\text{Tr}(A), 0)$ et il en est de même de A.

6) (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne usuelle, canoniquement associé à A. Puisque $\text{Tr}(A) \in R(A)$, il existe un vecteur colonne unitaire X tel que ${}^tXAX = \text{Tr}(A)$.

Soit e_1 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à X. Alors, e_1 est unitaire et $\langle x, f(e_1)\rangle = \text{Tr}(A)$. On complète la famille orthonormée (e_1) en $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, la première coordonnée de $f(e_1)$ dans $\mathscr{B}$ est $\langle x, f(e_1)\rangle = \text{Tr}(A)$. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est de la forme $A' = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}$. Enfin, puisque $\mathscr{B}_0$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\mathscr{B}$ sont orthonormées, la matrice de passage P de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est dans $O_n(\mathbb{R})$. Les formules de changement de base fournissent $A = PA'{}^tP$ et donc A est orthogonalement semblable à A'.

Puisque A' est orthogonalement semblable à A, A' est dans $S_{n+1}(\mathbb{R})$. Mais alors, l'égalité ${}^tA' = A'$ fournit en particulier ${}^tB = B$. Donc, $B \in S_n(\mathbb{R})$.

(b) $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A') = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ et donc $\text{Tr}(B) = 0$. Ainsi, B est une matrice symétrique réelle de trace nulle. Soient $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ (où $\lambda'_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda'_n$) les valeurs propres de B. Si $\lambda'_1 > 0$, alors $\text{Tr}(B) = \lambda'_1 + \dots + \lambda'_n > 0$ ce qui est faux. Donc, $\lambda'_1 \leqslant 0$. De même, $\lambda'_n \geqslant 0$ et donc $\text{Tr}(B) = 0 \in [\lambda'_1, \lambda'_n] = R(B)$.

(c) B est un élément de $S_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(B) \in R(B)$. Par hypothèse de récurrence, B est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle (car $\text{Tr}(B) = 0$). Soit $P' \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP'BP' = \begin{pmatrix} 0 & & \times \\ & \ddots & \\ \times & & 0 \end{pmatrix} = B'$.

Soit P la matrice définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P' \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que $P' \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ et de plus

$$ {}^tPA'P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & {}^tP' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & \times \\ \times & B' \end{pmatrix}. $$

A' est orthogonalement semblable à une matrice du type désiré et il en est de même de A.

On a montré par récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, si $\text{Tr}(A) \in R(A)$, alors A est orthogonalement semblable à une matrice (symétrique réelle) de diagonale $(\text{Tr}(A), 0, \dots, 0)$. La réciproque de ce résultat a été établi à la question 3).

7) On a nécessairement $na = \text{Tr}(A)$ ou encore $a = \dfrac{1}{n}\text{Tr}(A)$. Soit donc $a = \dfrac{1}{n}\text{Tr}(A)$.

La matrice $A' = A - aI_n$ est une matrice symétrique réelle de trace nulle. D'après la question 2), $\text{Tr}(A') = 0 \in R(A')$. D'après ce qui précède, A' est orthogonalement semblable à une matrice A'' de diagonale nulle. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A' = PA''{}^tP$.

$$ A = A' + aI_n = P\left(A'' + aI_n\right){}^t P $$

et donc A est orthogonalement semblable à la matrice $A'' + aI_n$ dont la diagonale est $(a, \dots, a)$.

