E.P.I.T.A. 2021

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Dans ce problème, on considère un espace vectoriel réel E supposé de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, et on se propose d'étudier les sommes de projecteurs de E qui commutent deux à deux. Dans la partie I, on traite un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans la partie II, on examine le cas général d'une somme de deux projecteurs qui commutent. Enfin, dans la partie III, on généralise l'étude au cas d'une somme de n projecteurs qui commutent deux à deux. Ces trois parties sont largement indépendantes.

■ PRÉLIMINAIRES

1°) On rappelle qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $f^2 = f$ et on convient de noter Id l'application Identité de E.

a) Etablir qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que p est un projecteur de E.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.

c) A l'aide de l'égalité : $\forall\, x \in E,\ x = p(x) + (x - p(x))$, montrer que : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

d) Ecrire la matrice de p dans une base de E obtenue par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
En déduire que p est diagonalisable et préciser ses valeurs propres et leurs ordres de multiplicité en fonction de son rang.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère les endomorphismes p et q dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Calculer les matrices P^2 et Q^2.

b) Déterminer des bases de l'image et du noyau de chacun des deux endomorphismes p et q.
En déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques des endomorphismes p et q.

c) Calculer enfin les produits $P\,Q$ et $Q\,P$.

3°) *Etude de l'endomorphisme $p + q$*

a) Ecrire la matrice $P + Q$ et déterminer son polynôme caractéristique.

b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $p + q$. Celui-ci est-il diagonalisable?

c) Préciser des vecteurs propres v_0, v_1, v_2 associés aux valeurs propres 0, 1, 2 de $p + q$.
On choisira ces vecteurs propres v_0, v_1, v_2 avec une première composante égale à 1.

d) En déduire une matrice inversible R telle que $R^{-1}(P + Q)\,R = D$ soit diagonale, et préciser D.
Déterminer les images des vecteurs v_0, v_1, v_2 par p et par q, et en déduire $R^{-1}\,P\,R$ et $R^{-1}\,Q\,R$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans cette partie, on considère à nouveau un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, on note Id l'endomorphisme identité de E, et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

4°) *Etude des valeurs propres de* $f = p + q$

a) Exprimer f^2 et f^3 en fonction de p, de q, et de $p \circ q = q \circ p$.
En déduire des réels β et γ tels que : $f^3 + \beta f^2 + \gamma f = 0$.

b) Soit x un vecteur propre de l'endomorphisme f associé à une valeur propre λ.
Préciser $f^2(x)$ et $f^3(x)$ en fonction de λ et x, puis montrer que : $\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \gamma \lambda = 0$.

c) En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$.

5°) *Etude des sous-espaces propres de* $f = p + q$

a) Démontrer l'égalité : $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(q)$.
En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(p + q - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Im}(q)$.

b) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(p)$, $\mathrm{Im}(q)$ chacun des réels 0 et 2 est-il valeur propre de $f = p + q$?
Préciser dans ce cas les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres 0 et 2.

c) Montrer l'inclusion : $\mathrm{Im}\left(2 f - f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$.
En vérifiant l'égalité : $x = (\mathrm{Id} - f)^2 (x) + \left(2 f - f^2\right)(x)$, montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f) \subset \mathrm{Im}\left(2 f - f^2\right)$.
En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\left(2 f - f^2\right) = \mathrm{Im}(p + q - 2\, p \circ q)$.

d) Calculer $(\mathrm{Id} - 2\,p)^2$ et $(\mathrm{Id} - 2\,p) \circ (p + q - 2\, p \circ q)$.
En déduire que 1 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $p \neq q$.

6°) *Réduction de l'endomorphisme* $f = p + q$

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2\,x_2$.
Exprimer $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction de x_0, x_1, x_2.
En déduire x_0, x_1, x_2 en fonction de x, $f(x)$, $f^2(x)$.

b) Etablir alors que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

c) Etablir que l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et préciser les projecteurs π_0, π_1, π_2 associant à un vecteur x ses projections sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ dans la direction de la somme des deux autres.

■ PARTIE III : SOMME DE *n* PROJECTEURS QUI COMMUTENT

On considère toujours un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 1$, et on étudie l'endomorphisme $f_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont n projecteurs de E commutant deux à deux, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$.

7°) *Co-diagonalisation de* $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante :
"Si n projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie commutent deux à deux, alors il existe une base de cet espace dans laquelle leurs n matrices sont diagonales."

a) Etablir que $\mathrm{Im}(p_n)$ et $\mathrm{Ker}(p_n)$ sont stables par p_k pour $1 \leq k \leq n$.

b) En supposant l'hypothèse $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie pour un entier $n \geq 2$, établir qu'il existe :

- une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(p_n)$ dans laquelle les matrices des endomorphismes induit par $p_1, \ldots, p_{n-1}$ sur $\mathrm{Im}(p_n)$ sont diagonales.
- une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(p_n)$ dans laquelle les matrices des endomorphismes induit par $p_1, \ldots, p_{n-1}$ sur $\mathrm{Ker}(p_n)$ sont diagonales.

c) Décrire la forme des matrices de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et la matrice de p_n dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ de E.
En déduire que l'hypothèse $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

8°) *Etude des valeurs propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

a) Décrire la forme de la matrice F_n de $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ de E.

b) En déduire que f_n est diagonalisable, préciser ses valeurs propres possibles, puis justifier l'égalité suivante : $E = \mathrm{Ker}(f_n) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker}(f_n - n\,\mathrm{Id})$.

c) Calculer le produit $f_n \circ (f_n - \mathrm{Id}) \circ (f_n - 2\,\mathrm{Id}) \circ \ \ldots \ \circ (f_n - n\,\mathrm{Id})$.

9°) *Etude de certains sous-espaces propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

a) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, pour toute partie à k éléments $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ de $[\![1, n]\!]$, exprimer le produit $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} \circ \left(p_{i_1} + p_{i_2} + \ \ldots \ + p_{i_k}\right)$ en fonction de $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}$.

b) On considère un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \ \ldots \ + p_n)(x) = 0$.
Qu'obtient-on en composant cette égalité à gauche par $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$?

c) On considère un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \ \ldots \ + p_n)(x) = 0$.
On suppose qu'il existe un entier $k \in [\![2, n]\!]$ tel que, pour toute partie $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ de $[\![1, n]\!]$ ayant k éléments distincts, on ait : $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}(x) = 0$.
Etablir alors que, pour toute partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$ de $[\![1, n]\!]$ ayant $k-1$ éléments distincts, on a :

$$p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) = 0.$$

En déduire qu'on a : $p_1(x) = p_2(x) = \ \ldots \ = p_n(x) = 0$.

d) Etablir l'égalité : $\mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ \ldots \ + p_n) = \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ \ldots \ \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$.
En déduire que : $\mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ \ldots \ + p_n - n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p_1) \bigcap \mathrm{Im}(p_2) \bigcap \ \ldots \ \bigcap \mathrm{Im}(p_n)$.

e) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p_1), \ \ldots, \mathrm{Ker}(p_n)$ et $\mathrm{Im}(p_1), \ \ldots, \mathrm{Im}(p_n)$ chacun des réels 0 et n est-il valeur propre de f_n ? Quels sont les sous-espaces propres associés?

10°) *Etude des projecteurs sur les sous-espaces propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

A tout polynôme $P(X) = a_p X^p + \ \ldots \ + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$, on associe l'endomorphisme $P(f_n)$ de E obtenu en substituant f_n à X dans P, et donc défini par : $P(f_n) = a_p f_n^p + \ \ldots \ + a_1 f_n + a_0\,\mathrm{Id}$.
Si P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on vérifie que :

$$(P+Q)(f_n) = P(f_n) + Q(f_n) \qquad \text{et} \qquad PQ\left(f_n\right) = P(f_n) \circ Q(f_n).$$

a) Pour $0 \leq k \leq n$, démontrer qu'il existe un et un seul polynôme L_k de degré n vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\} \ : \ L_k(i) = 0 \qquad \text{et} \qquad L_k(k) = 1.$$

b) Montrer que $L_0 + L_1 + \ \ldots \ + L_n = 1$.
En déduire, pour tout $x \in E$, l'égalité (1) : $L_0(f_n)(x) + L_1(f_n)(x) + \ \ldots \ + L_n(f_n)(x) = x$.

c) En exploitant 8.c), établir, pour $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in E$, que : $L_k(f_n)(x) \in \mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$.

d) En déduire que l'égalité (1) obtenue ci-dessus donne l'unique décomposition d'un vecteur $x \in E$ sur la somme directe des sous-espaces propres de f_n.
En déduire, si $k \in [\![0, n]\!]$ est valeur propre de f_n, que $L_k(f_n)$ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres de f_n.■