Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques

Préliminaires

1) a) Si p est un projecteur, puisque Id et p commutent, $(\mathrm{Id}-p)^2 = \mathrm{Id}-2p+p^2 = \mathrm{Id}-2p+p = \mathrm{Id}-p$. Donc, $\mathrm{Id}-p$ est un projecteur. Ensuite, en appliquant à $\mathrm{Id}-p$, si $\mathrm{Id}-p$ est un projecteur, alors $\mathrm{Id}-(\mathrm{Id}-p) = p$ est un projecteur.

On a montré que pour tout endomorphisme p de E, p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id}-p$ est un projecteur.

b) Soit $x \in E$. $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p) \Rightarrow x = p(x) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(p)$. Donc, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p) \subset \mathrm{Im}(p)$.
Inversement, soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Par suite, $p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y$ puis $(\mathrm{Id}-p)(y) = 0$ puis $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p)$. Donc, $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p) = \mathrm{Im}(p)$. En appliquant au projecteur $\mathrm{Id}-p$, on a aussi $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-(\mathrm{Id}-p)) = \mathrm{Ker}(p)$.

c) Soit $x \in E$. On a $x = y+z$ avec $y = p(x)$ et $z = x-p(x)$. y est dans $\mathrm{Im}(p)$ et d'autre part z est dans $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-p) = \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, $\forall x \in E$, $\exists (y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p) /\ x = y+z$. Ceci montre que $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p) \cap \mathrm{Ker}(p)$. Alors $p(x) = x$ et $p(x) = 0$ et donc $x = 0$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$.

On a montré que $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$ et que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$. Donc, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

d) On note r la dimension de $\mathrm{Im}(p)$ (r est donc le rang de p). On suppose d'abord $1 \leqslant r \leqslant n-1$.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $p(e_i) = e_i$ et pour tout $i \in [\![r+1,n]\!]$, $p(e_i) = 0$. Donc,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r}).$$

Ce dernier résultat reste vrai quand $r = 0$ ou $r = n$. Donc, p est diagonalisable. De plus, si $1 \leqslant r \leqslant n-1$, p admet 1 pour valeur propre d'ordre r et 0 pour valeur propre d'ordre $n-r$.
Si $r = 0$ (cas où $p = 0$), p admet 0 pour valeur propre d'ordre n et si $r = n$, p admet 1 pour valeur propre d'ordre n (cas où $p = \mathrm{Id}$).

Partie I. Etude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$

2) *Nature des endomorphismes* p *et* q

a) $P^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = P.$

$Q^2 = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -12 & 24 & -12 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = Q.$

b) Ainsi, $p^2 = p$ et $q^2 = q$ et donc p et q sont des projecteurs. Si on munit de plus $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique de sorte que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormée, puisque P et Q sont des matrices symétriques, on sait que p et q sont des projecteurs orthogonaux.

D'après la question 1)d), $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = 2$ puis d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = 1$.

Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(P)$ et donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$. Mais alors $\mathrm{Im}(p) = (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$ est le plan d'équation $x+y+z = 0$ ou encore $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2, e_1-e_3)$.
En résumé, p est la projection sur le plan d'équation $x+y+z = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$.

De même, $\mathrm{rg}(q) = 1$ puis d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(q)) = 2$.

Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\text{Im}(Q)$ et donc $\text{Im}(q) = \text{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$. Mais alors $\text{Ker}(q) = (\text{Im}(q))^\perp$ est le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ ou encore $\text{Ker}(q) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_3)$.
En résumé, q est la projection sur la droite $\text{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$ parallèlement au plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

c) $PQ = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = Q$ et
$QP = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = Q$.

3) *Etude de l'endomorphisme* $p + q$

a) $P + Q = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 8 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ puis,

$$\chi_{p+q} = \chi_{P+Q} = \det(XI_3 - (P+Q)) = \begin{vmatrix} X - \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} & X - \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & X - \frac{5}{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ X & X - \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ X & \frac{4}{6} & X - \frac{5}{6} \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)$$
$$= X\begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & X - \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ 1 & \frac{4}{6} & X - \frac{5}{6} \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & X - 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & X - 1 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$
$$= X(X-1)(X-2).$$

b) Ainsi, χ_{p+q} est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc $p + q$ est diagonalisable. Les valeurs propres de $p + q$ sont 0, 1 et 2.

c) De plus, les sous-espaces propres de $p + q$ sont des droites vectorielles.

• $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(q)$. Donc, $v_0 = e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(p+q) = E_0(p+q)$.
• $p(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et $q(e_1 - e_3) = 0$. Donc, $(p+q)(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$. Donc, $v_1 = e_1 - e_3$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(p + q - \text{Id}) = E_1(p+q)$.
• $p(e_1 - 2e_2 + e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3$ et $q(e_1 - 2e_2 + e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3$. Donc, $(p+q)(e_1 - 2e_2 + e_3) = 2(e_1 - 2e_2 + e_3)$. Donc, $v_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(p + q - 2\text{Id}) = E_2(p+q)$.

d) Soit $R = \text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(v_0, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après les formules de changement de bases, $R^{-1}(P+Q)R = D$ où $D = \text{diag}(0,1,2)$.

$p(v_0) = 0$, $p(v_1) = 1$ et $p(v_2) = v_2$. Donc, $R^{-1}PR = \text{diag}(0,1,1)$.
$q(v_0) = 0$, $q(v_1) = 0$ et $q(v_2) = v_2$. Donc, $R^{-1}QR = \text{diag}(0,0,1)$.

■ Partie II. Somme de deux projecteurs qui commutent

4) *Etude des valeurs propres de* $f = p + q$

a) Puisque p et q commutent, $f^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p + q + 2pq$ et $f^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = p + q + 6pq$.
Par suite, $pq = \dfrac{1}{2}\left(f^2 - (p+q)\right) = \dfrac{1}{2}\left(f^2 - f\right)$ puis $f^3 = f + \dfrac{6}{2}\left(f^2 - f\right) = 3f^2 - 2f$ et donc

$$f^3 - 3f^2 + 2f = 0.$$

b) Soit λ une (éventuelle) valeur propre de f puis x un vecteur propre associé. Alors, $f(x)=\lambda x$ puis $f^2(x)=\lambda^2 x$ puis $f^3(x)=\lambda^3(x)$ puis

$$0=\left(f^3-3f^2+2f\right)(x)=\left(\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda\right)x.$$

Puisque $x\neq 0$, on en déduit que $\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda=0$.

c) Ainsi, les éventuelles valeurs propres de l'endomorphisme f sont toutes racines du polynôme annulateur $X^3-3X^2+2X=X(X-1)(X-2)$ et donc $\mathrm{Sp}(f)\subset\{0,1,2\}$.

5) *Etude des sous-espaces propres de* $f=p+q$

a) Soit $x\in\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$. Alors, $p(x)=q(x)=0$ puis $(p+q)(x)=0$ et donc $x\in\mathrm{Ker}(p+q)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)\subset\mathrm{Ker}(p+q)$.

Inversement, soit $x\in\mathrm{Ker}(p+q)$. Alors, $p(x)=-q(x)$.
Par suite, $p(x)=p(p(x))=-p(q(x))=-q(p(x))=q(q(x))=q(x)$. Puisque $q(x)=-p(x)=p(x)$, on en déduit que $2p(x)=0$ puis $p(x)=0=q(x)$ et donc $x\in\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p+q)\subset\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$.

On a montré que $\mathrm{Ker}(p+q)=\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$.

$p_1=\mathrm{Id}-p$ et $q_1=\mathrm{Id}-q$ sont aussi des projecteurs qui commutent (car $(\mathrm{Id}-p)(\mathrm{Id}-q)=\mathrm{Id}-p-q+pq=\mathrm{Id}-p-q+qp=(\mathrm{Id}-q)(\mathrm{Id}-p)$). Donc, d'après la question 1)b),

$$\mathrm{Ker}(p+q-2\mathrm{Id})=\mathrm{Ker}\left(-\left(p_1+q_1\right)\right)=\mathrm{Ker}\left(p_1+q_1\right)=\mathrm{Ker}\left(p_1\right)\cap\mathrm{Ker}\left(q_1\right)=\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q).$$

b) $0\in\mathrm{Sp}(f)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(p+q)\neq\{0\}\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)\neq\{0\}$. Dans ce cas, $E_0(f)=\mathrm{Ker}(p+q)=\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$.
$2\in\mathrm{Sp}(f)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(p+q-2\mathrm{Id})\neq\{0\}\Leftrightarrow\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q)\neq\{0\}$. Dans ce cas, $E_2(f)=\mathrm{Ker}(p+q-2\mathrm{Id})=\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q)$.

c) $(\mathrm{Id}-f)\left(2f-f^2\right)=f^3-3f^2+2f=0$. Par suite, pour tout $x\in E$, $(\mathrm{Id}-f)\left(\left(2f-f^2\right)(x)\right)=0$. Ceci montre que $\mathrm{Im}\left(2f-f^2\right)\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)$.

Soit $x\in E$. $x=\mathrm{Id}(x)=\left(\mathrm{Id}-2f+f^2+2f-f^2\right)(x)=(\mathrm{Id}-f)^2(x)+\left(2f-f^2\right)(x)$. Si de plus, $x\in\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)$, alors $(\mathrm{Id}-f)(x)=0$ puis $(\mathrm{Id}-f)^2(x)=(\mathrm{Id}-f)((\mathrm{Id}-f)(x))=0$. Il reste $x=\left(2f-f^2\right)(x)\in\mathrm{Im}\left(2f-f^2\right)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)\subset\mathrm{Im}\left(2f-f^2\right)$ et finalement que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)=\mathrm{Im}\left(2f-f^2\right)$.

Enfin, $2f-f^2=2(p+q)-(p+q)^2=2p+2q-p-2pq-q=p+q-2pq$ et donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)=\mathrm{Im}\left(2f-f^2\right)=\mathrm{Im}(p+q-2pq)$.

d) $(\mathrm{Id}-2p)^2=\mathrm{Id}-4p+p^2=\mathrm{Id}-3p$ et $(\mathrm{Id}-2p)(p+q-2pq)=p+q-2pq-2p-2pq+4pq=-p+q$.

Si $p\neq q$, alors $(\mathrm{Id}-2p)(p+q-2pq)\neq 0$ et en particulier, $p+q-2pq\neq 0$. Si $p=q$, $p+q-2pq=p+p-2p^2=0$.

En résumé,

$$p\neq q\Leftrightarrow p+q-2pq\neq 0\Leftrightarrow\mathrm{Im}(p+q-2pq)\neq\{0\}\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)\neq\{0\}\Leftrightarrow 1\in\mathrm{Sp}(f).$$

6) *Réduction de l'endomorphisme* $f=p+q$

a) $x=x_0+x_1+x_2$ puis $f(x)=f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=x_1+2x_2$ puis $f^2(x)=x_1+4x_2$. Donc, $\left\{\begin{array}{l}x_0+x_1+x_2=x\\x_1+2x_2=f(x)\\x_1+4x_2=f^2(x)\end{array}\right.$ ce qui fournit nécessairement $x_2=\dfrac{1}{2}\left(f^2(x)-f(x)\right)$ puis $x_1=f(x)-2x_2=2f(x)-f^2(x)$ et enfin, $x_0=x-\left(2f(x)-f^2(x)\right)-\dfrac{1}{2}\left(f^2(x)-f(x)\right)=\dfrac{1}{2}\left(2x-3f(x)+f^2(x)\right)$.

b) Soient $x\in E$ puis $x_0=\dfrac{1}{2}\left(2x-3f(x)+f^2(x)\right)$, $x_1=2f(x)-f^2(x)$ et $x_2=\dfrac{1}{2}\left(f^2(x)-f(x)\right)$.

- $x_0+x_1+x_2=\dfrac{1}{2}\left(2x-3f(x)+f^2(x)\right)+2f(x)-f^2(x)+\dfrac{1}{2}\left(f^2(x)-f(x)\right)=x$.
- $f\left(x_0\right)=\dfrac{1}{2}\left(f^3-3f^2+2f\right)(x)=0$. Donc, $x_0\in\mathrm{Ker}(f)$.
- $(f-\mathrm{Id})\left(x_1\right)=(f-\mathrm{Id})\circ\left(-f^2+2f\right)(x)=\left(-f^3+3f^2+2f\right)=0$. Donc, $x_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.
- $(f-2\mathrm{Id})\left(x_2\right)=\dfrac{1}{2}(f-2\mathrm{Id})\circ\left(f^2-f\right)(x)=\dfrac{1}{2}\left(f^3-3f^2+2f\right)=0$. Donc, $x_2\in\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

On a montré que pour tout $x \in E$, il existe $(x_0, x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f - \text{Id}) \times \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ tel que $x = x_0 + x_1 + x_2$. L'unicité de cette décomposition étant assurée par la question a), on a montré que

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(x_0, x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f - \text{Id}) \times \text{Ker}(f - 2\text{Id}) /\ x = x_0 + x_1 + x_2$$

et donc que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

Remarque. Puisque les polynômes X, $X-1$ et $X-2$ sont deux à deux premiers entre eux et que le polynôme $X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ est annulateur de f, le théorème de décomposition des noyaux donne directement le résultat.

c) Dans une base de E adaptée à la décomposition précédente, la matrice de f est diagonale. Donc, f est diagonalisable. D'après la question précédente, $\pi_0 = \dfrac{1}{2}\left(f^2 - 3f + 2\text{Id}\right)$, $\pi_1 = -f^2 + 2f$ et $\pi_2 = \dfrac{1}{2}\left(f^2 - f\right)$.

■ Partie III. Somme de n projecteurs qui commutent

7) *Co-diagonalisation de* $p_1, \ldots, p_n$

a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $x \in E$, $p_k(p_n(x)) = p_n(p_k(x)) \in \text{Im}(p_n)$. Donc, $p_k(\text{Im}(p_n)) \subset \text{Im}(p_n)$ ou encore $\text{Im}(p_n)$ est stable par p_k.

Soit $x \in \text{Ker}(p_n)$. Alors $p_n(p_k(x)) = p_k(p_n(x)) = p_k(0) = 0$ et donc $p_k(x) \in \text{Ker}(p_n)$. Ceci montre que $\text{Ker}(p_n)$ est stable par p_k.

b) Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{H}_{n-1}$ vraie. Supposons de plus $\text{Im}(p_n) \neq \{0\}$ et $\text{Ker}(p_n) \neq \{0\}$. Notons $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$, les endomorphismes de $\text{Im}(p_n)$ respectivement induits par $p_1, \ldots, p_{n-1}$. Alors, $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$, sont $n-1$ projecteurs de $\text{Im}(p_n)$ commutant deux à deux. D'après l'hypothèse $\mathscr{H}_{n-1}$, il existe une base $\mathscr{B}_1$ de $\text{Im}(p_n)$ dans laquelle les matrices respectives de $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$, sont diagonales.

Le raisonnement précédent reste valable en remplaçant $\text{Im}(p_n)$ par $\text{Ker}(p_n)$.

c) Puisque $E = \text{Im}(p_n) \oplus \text{Ker}(p_n)$, on sait que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de E. Pour chaque $j \in [\![1, n-1]\!]$, puisque $\text{Sp}(p_j) \subset \{0, 1\}$, la matrice de p_j est de la forme $\text{diag}(\varepsilon_{1,j}, \ldots, \varepsilon_{n,j})$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_{i,j} \in \{0, 1\}$. Ceci reste vrai dans le cas où $\text{Im}(p_n) = \{0\}$ (ou encore $\mathscr{B} = \mathscr{B}_2$) ou $\text{Ker}(p_n) = \{0\}$ (ou encore $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$).

$\mathscr{H}_1$ est vraie et si, pour $n \geqslant 2$, $\mathscr{H}_{n-1}$ est vraie et si $p_1, \ldots, p_n$ sont n projecteurs commutant deux à deux, il existe une base $\mathscr{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p_n) \oplus \text{Ker}(p_n)$ dans la quelle la matrice de chaque p_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, est diagonale. Dans cette base, la matrice de p_n s'écrit $\text{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ où le nombre de 1 est la rang de p_n. Cette base $\mathscr{B}$ est une base commune de diagonalisation de $p_1, \ldots, p_n$. Donc, $\mathscr{H}_n$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{H}_n$ est vraie.

8) *Etude des valeurs propres de* $f_n = p_1 + \ldots + p_n$

a) Dans la base $\mathscr{B}$ de la question précédente, la matrice de f est $D_1 + \ldots + D_n$ où les matrices D_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont à coefficients dans $\{0, 1\}$. Donc, la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est de la forme $D = \text{diag}(p_1, \ldots, p_n)$ où, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [\![1, n]\!]$.

b) Puisqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, f est un endomorphisme diagonalisable. De plus, $\text{Sp}(f) \subset [\![0, n]\!]$. On sait alors que E est somme directe des sous-espaces propres de f et donc, en tenant compte du fait que certains des sous-espaces $\text{Ker}(f - k\text{Id})$ ci-dessous peuvent être réduits à $\{0\}$ (dans le cas où k n'est pas valeur propre de f), on a

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}(f - n\text{Id}).$$

c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit $x \in \text{Ker}(f - k\text{Id})$. Puisque des polynômes en f commutent deux à deux,

$$\prod_{j=0}^{n}(f - j\text{Id})(x) = \left(\prod_{j \neq i}(f - j\text{Id})\right)((f - k\text{Id})(x)) = 0.$$

Ainsi, l'endomorphisme $\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(f - j\text{Id})$ s'annule sur des sous-espaces supplémentaires de E.

On en déduit que $f \circ (f - \text{Id}) \circ \ldots \circ (f - n\text{Id}) = 0$.

9) *Etude des certains sous-espaces propres de* $f = p_1 + \ldots + p_n$

a) Puisque les endomorphismes $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$, commutent deux à deux,

$$\begin{aligned} p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} \circ (p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}) &= p_{i_1}^2 \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} + p_{i_1} \circ p_{i_2}^2 \circ \ldots \circ p_{i_k} + \ldots + p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}^2 \\ &= k\, p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}. \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f_n)$. Donc, $f_n(x) = 0$ puis $p_1 \circ \ldots \circ p_n(f_n(x)) = 0$ puis, d'après la question précédente, $n\, p_1 \circ \ldots \circ p_n(x) = 0$ puis $p_1 \circ \ldots \circ p_n(x) = 0$.

c) Soit $\{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ une partie à $k-1$ éléments de $[\![1, n]\!]$. Puisque des polynômes en f commutent et les projections p_j commutent deux à deux,

$$\begin{aligned} 0 = p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}((p_1 + \ldots + p_n)(x)) &= (p_1 + \ldots + p_n) \circ p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) \\ &= (p_{i_1} + \ldots + p_{i_{k-1}}) \circ p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) + \sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}} p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}} \circ p_j(x) \\ &= (p_{i_1} + \ldots + p_{i_{k-1}}) \circ p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) \text{ (par hypothèse)} \\ &= (k-1) p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x). \end{aligned}$$

Puisque $k-1$ n'est pas nul, on en déduit que $p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) = 0$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathscr{P}_k$: « pour tout partie $I_k = \{i_1, \ldots, i_k\}$ de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, $p_{i_1} \circ \ldots \circ p_{i_k}(x) = 0$ ».

D'après b), $\mathscr{P}_n$ est vraie et d'après c), si pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie, alors $\mathscr{P}_{k-1}$ est vraie. On a donc montré par récurrence descendante finie que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie.

En particulier, $\mathscr{P}_1$ est vraie et donc $p_1(x) = \ldots = p_n(x) = 0$.

d) La question c) montre que $\operatorname{Ker}(p_1 + \ldots + p_n) \subset \operatorname{Ker}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(p_n)$. L'inclusion contraire étant immédiate, on a montré que

$$\operatorname{Ker}(p_1 + \ldots + p_n) = \operatorname{Ker}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(p_n).$$

En appliquant ce résultat aux projecteurs $\mathrm{Id} - p_1, \ldots, \mathrm{Id} - p_n$, qui commutent deux à deux, comme dans la question 5)a), on obtient aussi

$$\operatorname{Ker}(n\mathrm{Id} - p_1 - \ldots - p_n) = \operatorname{Ker}(p_1 + \ldots + p_n - n\mathrm{Id}) = \operatorname{Im}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Im}(p_n).$$

e) 0 (resp. n) est effectivement valeur propre de f_n si et seulement si $\operatorname{Ker}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(p_n) \neq \{0\}$ (resp. $\operatorname{Im}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Im}(p_n) \neq \{0\}$). Dans ce cas, $E_0(f_n) = \operatorname{Ker}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ker}(p_n)$ (resp. $E_n(f_n) = \operatorname{Im}(p_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Im}(p_n)$).

10) *Etude des projecteurs sur les sous-espaces propres de* $f = p_1 + \ldots + p_n$

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme L_k doit admettre les n nombres i, $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$, deux à deux distincts pour racines. Donc, il existe un polynôme Q tel que $L_k = Q \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (X - i)$. L_k doit être de degré n et donc, Q est une constante λ. Enfin, l'égalité $L_k(k) = 1$ fournit $\lambda \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (k - i) = 1$ puis, nécessairement

$$L_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{X - i}{k - i}.$$

Ceci montre l'unicité de L_k. Réciproquement, le polynôme ci-dessus convient clairement. On a montré l'existence et l'unicité du polynôme L_k.

b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(k) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{i,k} = 1$. Donc, le polynôme $L_0 + L_1 + \ldots + L_n - 1$, de degré inférieur ou égal à n, admet au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes, à savoir les nombres $0, 1, \ldots, n$. On en déduit que $L_0 + L_1 + \ldots + L_n - 1 = 0$ puis que

$$L_0 + L_1 + \ldots + L_n = 1.$$

En évaluant en f_n, on obtient $L_0(f_n) + L_1(f_n) + \ldots + L_n(f_n) = \mathrm{Id}$ et donc

$$\forall x \in E,\ L_0(f_n)(x) + L_1(f_n)(x) + \ldots + L_n(f_n)(x) = x.$$

c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit $P_k = (X - k)L_k$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $P_k = \lambda \prod_{i=0}^{n}(X - i)$. D'après 8)c), $P_k(f_n) = 0$. Ceci fournit pour tout x de E,

$$0 = P_k(f_n)(x) = (f - k\mathrm{Id})(L_k(f_n)(x)).$$

Donc, pour tout x de E, $L(f_n)(x) \in \mathrm{Ker}(f - k\mathrm{Id})$.

d) Soit $x \in E$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $x_k = L_k(f_n)(x)$. D'après ce qui précède, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k \in \mathrm{Ker}(f_n - k\mathrm{Id})$ et $x = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Puisque d'autre part, $E = \mathrm{Ker}(f_n) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - \mathrm{Id}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(f_n - n\mathrm{Id})$ d'après la question 8)b), on a obtenu l'unique décomposition d'un vecteur $x \in E$ sur la somme directe des sous-espaces propres de f_n. Dans le cas où $\mathrm{Ker}(f_n - k\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ (c'est-à-dire dans le cas où k est valeur propre de f_n), le projeté de x sur $\mathrm{Ker}(f_n - k\mathrm{Id})$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces est $L_k(f_n)(x)$.

