E.P.I.T.A. 2021

Epreuve de mathématiques (Option - 2h)

On rappelle qu'un nombre réel est dit *rationnel* s'il appartient à $\mathbb{Q}$, et qu'il est dit *irrationnel* sinon. Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la fraction p/q est dite *irréductible* si les entiers p et q sont premiers entre eux, c'est à dire si leur PGCD est égal à 1.
Dans ce problème, on étudie le caractère rationnel ou irrationnel des réels du type $\cos(k\pi/(n+1))$ où k et n appartienent à $\mathbb{N}$. On examine le cas particulier des réels $\cos(k\pi/5)$ dans la partie I, puis le cas général dans la partie II en exploitant une suite de polynômes (U_n).

■ PARTIE I : Irrationnalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ pour $\frac{k}{5}$ irréductible

1°) *Recherche d'un polynôme à coefficients entiers dont* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *est racine*

a) Exprimer les valeurs de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
Exprimer de même $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

b) Déterminer les racines complexes de l'équation $z^5 + 1 = 0$.
Calculer leur somme, puis en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$, puis expliciter à l'aide du réel $\sqrt{5}$ des expressions de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

2°) *Irrationnalité de de* $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ *lorsque* $\frac{k}{5}$ *est irréductible*

a) Démontrer que le réel $\sqrt{5}$ est irrationnel, puis que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont irrationnels.

b) Etablir, si $k \in \mathbb{N}$ et si $\frac{k}{5}$ est irréductible, que les réels $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ sont irrationnels.

■ PARTIE II : Irrationnalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $\frac{k}{n+1}$ irréductible et $n > 2$

On considère la suite de polynômes à coefficients réels définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0(X) = 1, \quad U_1(X) = 2X \quad \text{puis :} \quad \forall\, n \geq 2, \quad U_n(X) = 2X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X).$$

3°) *Premières propriétés des polynômes* U_n

a) Expliciter les expressions de $U_n(X)$ pour $0 \leq n \leq 5$.
b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.
c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, préciser la valeur de $U_n(0)$ en fonction de n.
d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, vérifier que les coefficients de U_n sont entiers.
e) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, vérifier que U_n est pair si n est pair, et impair si n est impair.

4°) *Factorisation dans* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes* U_n

a) Pour tout entier naturel n et tout réel θ non multiple de π, démontrer la relation suivante :

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}.$$

b) Préciser les valeurs de $U_n(1)$ et $U_n(-1)$ en fonction de n.

c) En déduire que le polynôme U_n admet n racines réelles distinctes qu'on précisera, puis donner l'expression factorisée de $U_n(X)$.

5°) *Racines rationnelles des polynômes* U_n

On convient d'introduire la suite des polynômes (V_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n(X) = U_n\left(\frac{X}{2}\right)$.

Comme le degré de V_n est celui de U_n, on posera dans cette question : $V_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j^{(n)}\, X^j$.

a) Expliciter les expressions de $V_n(X)$ pour $0 \le n \le 5$.

b) Pour tout entier naturel n, établir que les coefficients du polynôme V_n appartiennent à $\mathbb{Z}$.
Préciser en particulier le coefficient dominant $\mu_n^{(n)}$ de V_n.
Etablir pour $0 \le j \le n$ que le coefficient de X^j dans U_n est un entier multiple de 2^j.

c) On considère une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) racine du polynôme V_n.
En exploitant l'égalité $q^n\, V_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ dans $\mathbb{Z}$, démontrer que $q = 1$.
En déduire qu'une racine rationnelle de V_n appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.

d) Démontrer que les seules racines rationnelles possibles de U_n appartiennent à $\left\{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\}$.

6°) *Etude de l'irrationnalité des réels* $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ *pour* $\frac{k}{n+1}$ *irréductible*

a) Déduire des résultats précédents que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$. Que dire si $0 \le n \le 2$?

b) Etablir plus généralement que $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$, $1 \le k \le n$, et $\frac{k}{n+1}$ irréductible.

c) Etablir enfin que $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$, $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{k}{n+1}$ irréductible.

7°) *Coefficients dans la base canonique des polynômes* U_n

a) En exploitant la relation obtenue à la question 4.a), démontrer que U_n est solution de l'équation différentielle suivante sur $]-1,\ 1[$, puis sur $\mathbb{R}$:

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 3\,x\,y' + n(n+2)\,y \;=\; 0.$$

b) On convient de poser $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, x^k$.
Exprimer λ_{k+2} en fonction de λ_k et montrer qu'on a pour tout entier j tel que $0 \le 2\,j \le n$:

$$\lambda_{n-2\,j} \;=\; \frac{(-1)^j}{2^{2\,j}} \binom{n-j}{j} \lambda_n.$$

c) En déduire l'expression de U_n dans la base canonique.