Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

■ Partie I. Irrationnalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ pour $\frac{k}{5}$ irréductible

1) *Recherche d'un polynôme à coefficients entiers dont* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *est racine*

a) $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ puis, $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
et $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ puis, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

b) Une racine de l'équation $z^5=-1$ est $z_0=e^{\frac{i\pi}{5}}$. Les racines de cette équation sont les nombres $z_k=e^{\frac{i\pi}{5}}\times e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k\in[\![0,4]\!]$. Ce sont les nombres

$$e^{\frac{i\pi}{5}},\quad e^{\frac{3i\pi}{5}},\quad ,-1,\quad e^{\frac{7i\pi}{5}}\quad \text{et}\quad e^{\frac{9i\pi}{5}}.$$

Puisque $e^{\frac{2i\pi}{5}}\neq 1$, $\sum_{k=0}^{4}z_k=e^{\frac{i\pi}{5}}\times\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{\frac{2i\pi}{5}}}=0$ et donc $e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{3i\pi}{5}}+e^{\frac{7i\pi}{5}}+e^{\frac{9i\pi}{5}}=1$. Maintenant, d'après les formules d'Euler, $e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{9i\pi}{5}}=e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{-\frac{i\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $e^{\frac{3i\pi}{5}}+e^{\frac{7i\pi}{5}}=e^{\frac{3i\pi}{5}}+e^{-\frac{3i\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$. Finalement, $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=1$ puis

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}.$$

c) D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\times\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)&=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{-i\pi}{5}}\right)\left(e^{\frac{3i\pi}{5}}+e^{\frac{-3i\pi}{5}}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{-2i\pi}{5}}+e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-4i\pi}{5}}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, les deux nombres $a=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $b=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ vérifient $a+b=\frac{1}{2}$ et $ab=-\frac{1}{4}$. On sait que ces deux nombres sont les solutions de l'équation $X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}=0$ ou encore $4X^2-2X-1=0$.

Donc, $\{a,b\}=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$. Puisque $\frac{\pi}{5}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ et puisque $ab<0$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)<0$. Finalement

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\quad\text{et}\quad\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

2) *Irrationnalité de* $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ *lorsque* $\frac{k}{5}$ *irréductible*

a) Supposons par l'absurde qu'il existe $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ ou encore $5b^2=a^2$. Les deux entiers $5b^2$ puis a^2 sont supérieurs ou égaux à 2. L'exposant du nombre premier 5 dans la décomposition primaire de $5b^2$ est un nombre impair tandis que l'exposant du nombre premier 5 dans la décomposition primaire de a^2 est un nombre pair. L'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers montre que les deux nombres $5b^2$ et a^2 ne peuvent être égaux.

L'hypothèse $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ était absurde et donc $\sqrt{5}$ est irrationnel.

$a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 4a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 4a-1 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Mais alors, puisque $\sqrt{5}$ est irrationnel, on a montré que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel. De même, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque 5 est un nombre premier, $k \wedge 5 = 1 \Leftrightarrow 5 \not| k \Leftrightarrow k \notin 5\mathbb{N}$.
D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ est irrationnel quand $k = 1$ et $k = 3$. Mais alors, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sont irrationnels. Ainsi, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \notin 5\mathbb{N}$. La division euclidienne de k par 5 s'écrit $k = 5q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![1,4]\!]$. On a alors

$$\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{r\pi}{5} + q\pi\right) = (-1)^q \cos\left(\frac{r\pi}{5}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

On a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k}{5}$ est irréductible, $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

■ Partie II. Irrationnalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $\frac{k}{n+1}$ irréductible et $n > 2$

3) *Premières propriétés des polynômes* U_n

a) $U_2 = 2XU_1 - U_0 = 4X^2 - 1$. $U_3 = 2X\left(4X^2 - 1\right) - 2X = 8X^3 - 4X$. $U_4 = 2X\left(8X^3 - 4X\right) - \left(4X^2 - 1\right) = 16X^4 - 12X^2 + 1$.
$U_5 = 2X\left(16X^4 - 12X^2 + 1\right) - \left(8X^3 - 4X\right) = 32X^5 - 32X^3 + 6X$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(U_n) = n$ et $\text{dom}(U_n) = 2^n$.

- Ces égalités sont vraies quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\deg(U_n) = n$, $\text{dom}(U_n) = 2^n$, $\deg(U_{n+1}) = n + 1$ et $\text{dom}(U_{n+1}) = 2^{n+1}$. Alors

$$\deg(U_{n+2}) = \deg(2XU_{n+1} - U_n) = \deg(XU_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$$

et

$$\text{dom}(U_{n+2}) = \text{dom}(2XU_{n+1} - U_n) = \text{dom}(2XU_{n+1}) = 2\text{dom}(U_{n+1}) = 2^{n+2}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(U_n) = n$ et $\text{dom}(U_n) = 2^n$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, en évaluant en 0, on obtient $U_n(0) = -U_{n-2}(0)$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{2n}(0) = (-1)^n U_0(0) = (-1)^n$ et $U_{2n+1}(0) = (-1)^n U_1(0) = 0$.

d) U_0 et U_1 sont à coefficients entiers et si pour $n \geqslant 0$, U_n et U_{n+1} sont à coefficients entiers, alors $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$ est à coefficients entiers.
On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est à coefficients entiers.

e) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$.

- L'égalité est vraie quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$ et $U_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} U_n(X)$. Alors

$$\begin{aligned}U_{n+2}(-X) &= (-2X)U_{n+1}(-X) - U_n(-X) = (-1)^{n+2} \times 2XU_{n+1}(X) - (-1)^n U_n(X)\\ &= (-1)^{n+2} \times 2XU_{n+1}(X) - (-1)^{n+2} U_n(X) \text{ (puisque } n \text{ et } n+2 \text{ ont même parité)}\\ &= (-1)^{n+2}\left(2XU_{n+1}(X) - U_n(X)\right) = (-1)^{n+2} U_{n+2}(X).\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$. Ainsi, le polynôme U_n a la parité de n.

4) *Factorisation dans* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes* U_n

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = 1 = U_0(\cos(\theta))$ et $\dfrac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = 2\cos(\theta) = U_1(\cos(\theta))$.
Le résultat est vrai quand $n = 0$ et $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ et $U_{n+1}(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)}$.
Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} U_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)U_{n+1}(\cos(\theta)) - U_n(\cos(\theta)) &= \frac{2\cos(\theta)\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$

b) $\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \underset{\theta \to 0}{\sim} \dfrac{(n+1)\theta}{\theta} = n+1$. Mais alors, par continuité de U_n en 1,

$$n+1 = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} U_n(\cos(\theta)) = \lim_{x \to 1} U_n(x) = U_n(1).$$

Donc, $U_n(1) = n+1$. Puisque U_n a la parité de n, on en déduit aussi $U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n(n+1)$.

c) $U_0 = 1$ n'admet pas de racine et $U_1 = 2X$ admet une racine et une seule à savoir 0.

Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ puis $x_k = \cos(\theta_k)$. Pour $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$, $\theta_k \notin \pi\mathbb{Z}$ puis

$$U_n(x_k) = \frac{\sin((n+1)\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin(\theta_k)} = 0.$$

Donc, les nombres x_k, $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$, sont racines du polynôme U_n.

On a $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \dfrac{n\pi}{n+1} < \pi$. Par injectivité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ sur $[0, \pi]$, les n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont n racines deux à deux distinctes de U_n. Puisque U_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de U_n, toutes simples. En tenant compte de $\mathrm{dom}(U_n) = 2^n$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

5) *Racines rationnelles des polynômes* U_n

a) D'après la question 3)a), $V_0(X) = U_0\left(\dfrac{X}{2}\right) = 1$. $V_1(X) = U_1\left(\dfrac{X}{2}\right) = X$. $V_2(X) = U_2\left(\dfrac{X}{2}\right) = X^2 - 1$ puis $V_3(X) = X^3 - 2X$, $V_4(X) = X^4 - 3X^2 + 1$ et $V_5(X) = X^5 - 4X^3 + 3X$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+2}(X) = U_{n+2}\left(\frac{X}{2}\right) = 2 \times \frac{X}{2} \times U_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) - U_n\left(\frac{X}{2}\right) = XV_{n+1}(X) - V_n(X).$$

De plus, $V_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et $V_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et donc, comme à la question 3)d), par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, puisque U_n est de degré n, $\mu_n^{(n)} = \mathrm{dom}(V_n) = \mathrm{dom}\left(U_n\left(\dfrac{X}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{dom}(U_n(X)) = \dfrac{1}{2^n} \times 2^n = 1$.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n(X) = V_n(2X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j \mu_n^{(j)} X^j$ et, puisque chaque $\mu_n^{(j)}$ est un entier relatif, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, le coefficient de X^j dans U_n est un entier multiple de 2^j.

c) Soit $n \geqslant 1$. Soit r une éventuelle racine rationnelle non nulle de V_n. Posons $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

$0 = q^n V_n\left(\dfrac{p}{q}\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mu_n^{(j)} p^j q^{n-j}$ puis en tenant compte de $\mu_n^{(n)} = 1$,

$$p^n = -q\sum_{j=0}^{n-1} \mu_n^{(j)} p^j q^{n-j-1}.$$

Ainsi, q divise $p^n = 1 \times p^n$. Puisque $p \wedge q = 1$, on a encore $q \wedge p^n = 1$ puis q divise 1 d'après le théorème de Gauss. Finalement, $q = 1$.

d) Ainsi, une racine rationnelle de V_n est un entier relatif (en récupérant éventuellement la racine 0). Mais d'après la question 4)c), les racines de U_n sont éléments de $[-1, 1]$ et donc les racines de V_n (qui sont les doubles des racines de U_n), sont éléments de $[-2, 2]$. Ces racines ne peuvent être que -2, -1, 0, 1 et 2. Par suite, les racines rationnelles de U_n ne peuvent être que -1, $-\dfrac{1}{2}$, 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1. Enfin, d'après la question 4)b), -1 et 1 ne sont pas racines de U_n.

Finalement, une éventuelle racine rationnelle de U_n appartient nécessairement à $\left\{-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

6) *Etude de l'irrationnalité des réels* $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ *pour* $\dfrac{k}{n+1}$ *irréductible*

a) Soit $n > 2$. Puisque $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{n+1}$ sont dans $[0, \pi]$, par injectivité de cos sur $[0, \pi]$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow n+1 = 3 \Leftrightarrow n = 2,$$

ce qui est faux. Donc, pour tout $n > 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) \neq \dfrac{1}{2}$. De même,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{n+1} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow n+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1}{2},$$

ce qui est faux. Donc, pour tout $n > 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) \neq -\dfrac{1}{2}$. Enfin,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n = 1,$$

ce qui est faux. Finalement, $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ n'est pas une éventuelle racine rationnelle de U_n et donc, pour $n > 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel.

Si $n = 0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{1}\right) = -1$ est rationnel. Si $n = 1$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ est rationnel. Si $n = 2$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ est rationnel.

b) Soit $n > 2$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $k \wedge (n+1) = 1$. De nouveau, $\dfrac{k\pi}{n+1}$ est dans $[0, \pi]$ puis

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{k\pi}{n+1} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow n+1 = 3k.$$

Mais alors, k divise $n+1$ puis $k = k \wedge (n+1) = 1$ puis $n+1 = 3 \times 1$ et donc $n = 2$ ce qui est faux. Donc, $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \neq \dfrac{1}{2}$. De même,

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{k\pi}{n+1} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 3k = 2(n+1).$$

Dans ce cas, k divise $2(n+1)$ puis k divise 2 d'après le théorème de Gauss. Mais si $k = 1$, $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \neq -\dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente. Et si $k = 2$, alors $2(n+1) = 6$ puis $n = 2$ ce qui est faux. Donc, $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \neq -\dfrac{1}{2}$. Enfin,

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{k\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2k = n+1.$$

Mais alors, $k=1$ puis $n=1$ ce qui est faux. Donc, $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\neq 0$.

Si $k\in[\![1,n]\!]$ est tel que $k\wedge(n+1)=1$, alors $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ n'est aucune des éventuelles racines rationnelles de U_n et donc $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel.

c) Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\wedge(n+1)=1$. La division euclidienne de k par $n+1$ s'écrit $k=q(n+1)+r$ avec $0\leqslant r\leqslant n$. On a alors $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)=\cos\left(\dfrac{r\pi}{n+1}+q\pi\right)=(-1)^q\cos\left(\dfrac{r\pi}{n+1}\right)$. D'autre part, $r\wedge(n+1)=(n+1)\wedge k=1$ (d'après le lemme d'EUCLIDE). Donc, $\cos\left(\dfrac{r\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel puis $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel.

7) *Coefficients dans la base canonique des polynômes* U_n

a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\sin(\theta)U_n(\cos(\theta))=\sin((n+1)\theta)$. En dérivant une première fois, on a pour tout $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$,

$$\cos(\theta)U_n(\cos(\theta))-\sin^2(\theta)U_n'(\cos(\theta))=(n+1)\cos((n+1)\theta)$$

puis en redérivant

$$\begin{aligned}-\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)-\cos(\theta)\sin(\theta)U_n'(\cos(\theta))-2\sin(\theta)\cos(\theta)U_n'(\cos(\theta))+\sin^3(\theta)U_n''(\cos(\theta))\\ =-(n+1)^2\sin((n+1)\theta)=-(n+1)^2\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)).\end{aligned}$$

Après simplification par le réel non nul $\sin(\theta)$, on obtient

$$\left(1-\cos^2(\theta)\right)U_n''(\cos(\theta))-3\cos(\theta)U_n'(\cos(\theta))+n(n+2)U_n(\cos(\theta))=0$$

pour tout réel $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ ou encore

$$\forall x\in]-1,1[,\ \left(1-x^2\right)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0.$$

Ainsi, le polynôme $\left(1-X^2\right)U_n''(X)-3XU_n'(X)+n(n+2)U_n(X)$ a une infinité de racines et donc

$$\left(1-X^2\right)U_n''(X)-3XU_n'(X)+n(n+2)U_n(X)=0.$$

b) Soit $n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}&\left(1-X^2\right)U_n''(X)-3XU_n'(X)+n(n+2)U_n(X)\\
&\qquad=\left(1-X^2\right)\sum_{k=2}^{n}\lambda_k k(k-1)X^{k-2}-3X\sum_{k=1}^{n}\lambda_k kX^{k-1}+n(n+2)\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k\\
&\qquad=\sum_{k=2}^{n}\lambda_k k(k-1)X^{k-2}-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k k(k-1)X^k-3\sum_{k=0}^{n}\lambda_k kX^k+n(n+2)\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_{k+2}(k+2)(k+1)X^k+\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2-2k+2n)\lambda_k X^k\\
&\qquad=(2n-3)\lambda_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\lambda_{k+2}(k+2)(k+1)+(n-k)(n+k+2)\lambda_k\right)X^k\end{aligned}$$

Puisque ce polynôme est le polynôme nul, on en déduit que pour tout $k\in[\![0,n-2]\!]$, $\lambda_k=-\dfrac{(k+1)(k+2)}{(n-k)(n+k+2)}\lambda_{k+2}$.

Puisque U_n a la parité de n, on sait déjà que pour tout entier j tel que $0\leqslant 2j+1\leqslant n$, $\lambda_{n-2j-1}=0$.

Ensuite, pour j entier tel que $1\leqslant 2j\leqslant n$, $\lambda_{n-2j}=-\dfrac{(n-2j+1)(n-2j+2)}{2^2j(n-j+1)}\lambda_{n-2j+2}$ et donc,

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2j} &= -\frac{(n-2j+1)(n-2j+2)}{2^2 j(n+1-j)} \times -\frac{(n-2j+3)(n-2j+4)}{2^2(j-1)(n+2-j)} \times \ldots \times -\frac{(n-1)n}{2^2 \times (1)(n)}\lambda_n \\ &= \frac{(-1)^j}{2^{2j}}\frac{n!(n-j)!}{(n-2j)!j!n!}\lambda_n = \frac{(-1)^j}{2^{2j}}\frac{(n-j)!}{(n-2j)!j!}\lambda_n = \frac{(-1)^j}{2^{2j}}\binom{n-j}{j}\lambda_n \\ &= (-1)^j 2^{n-2j}\binom{n-j}{j},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $j = 0$.

c) Le résultat précédent reste vrai quand $n = 0$ et $n = 1$ et finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^j 2^{n-2j}\binom{n-j}{j}X^{n-2j}.$$

