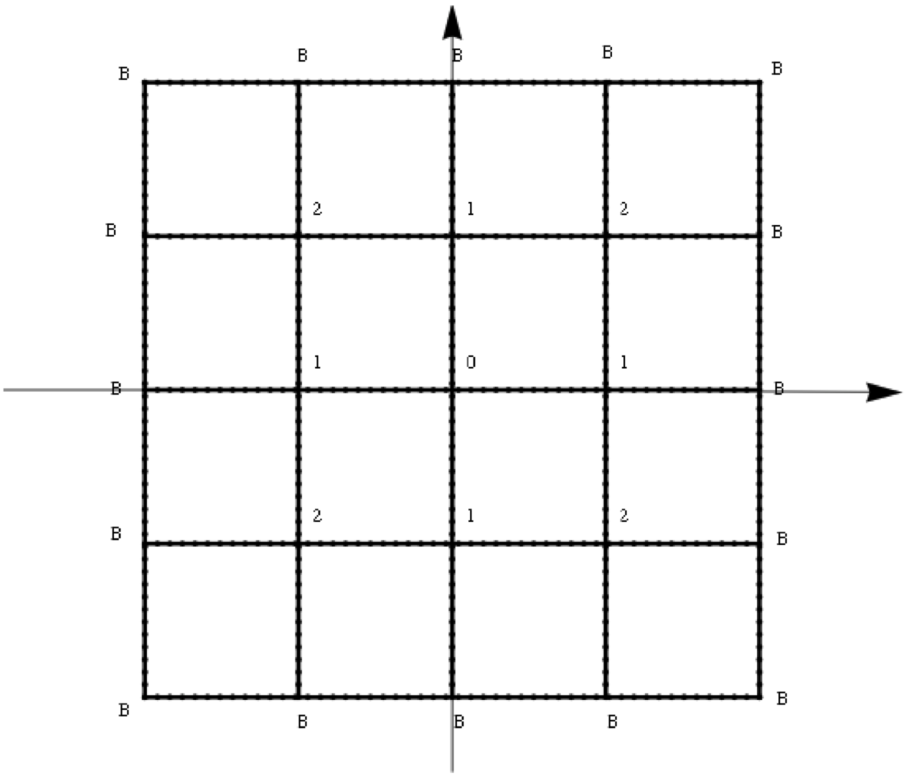
E.P.I.T.A. 2020

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie I

On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2,\ 2]\times[-2,\ 2]$ avec :
- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.
- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées $(i,\ j)$ avec $i,\ j \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2\}$. On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, et B les points du bord du carré $C = [-2,\ 2]\times[-2,\ 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points $(i,\ j)$ où $i,\ j \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).

2) à tout instant n, si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon à se trouver à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M.

3) à tout instant n, si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2,\ 2]\times[-2,\ 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point $(i,\ j)$ avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

1°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

a) Expliquer brièvement pourquoi on a : $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$.

b) Expliciter de même les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.

c) Exprimer chacun des 4 réels $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = B)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

d) Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a) Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0.

On demande de déterminer les quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur U_1 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 1$ dont la dernière composante est égale à 1.
- le vecteur U_2 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_3 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_4 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 0$ dont la dernière composante est égale à 1.

b) On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4.

On note D la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1}.

3°) *Lois des variables aléatoires* X_n

Pour tout entier naturel n, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

a) Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n, qu'on a : $V_n = P\, D^n\, P^{-1}\, V_0$.

b) Soit X un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4.

Déterminer X tel que $P\,X = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

c) En déduire $P^{-1}\,V_0$, puis $D^n\,P^{-1}\,V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$, et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

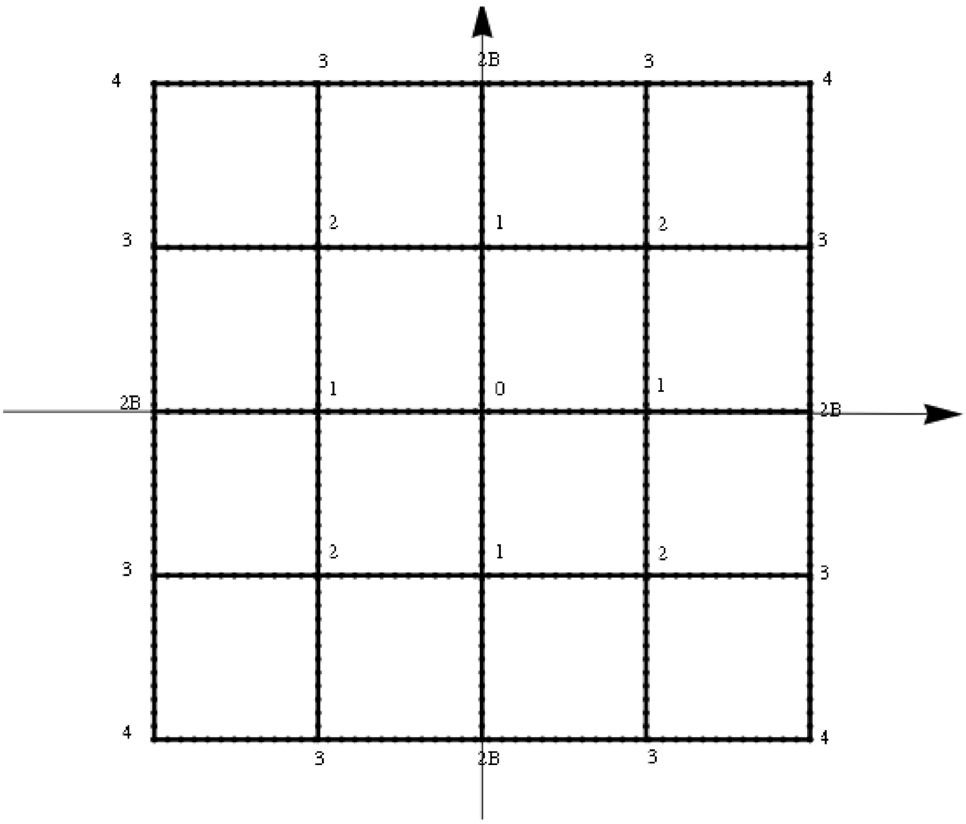
4°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

On désigne par T la fonction indiquant l'instant $n \in \mathbb{N}$ où, *pour la première fois*, l'individu atteint le bord du carré C, c'est-à-dire où l'événement $X_n = B$ est réalisé *pour la première fois.*

a) Montrer, pour tout entier naturel n, que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$, puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
   Ainsi, on peut considérer la fonction T comme une variable aléatoire discrète.
b) Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement $(T = 2\,n)$ à l'aide des événements $(X_{2\,n} = B)$ et $(X_{2\,n-1} = 1)$.
   En déduire $\mathbb{P}(T = 2\,n)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.
d) A l'aide d'un raisonnement analogue, déterminer $\mathbb{P}(T = 2\,n + 1)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.
d) Déterminer alors l'espérance de la variable aléatoire T.

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie II

On note maintenant les 25 points de la grille comme suit : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, $2\,B$ les points à 2 arêtes de 0 et appartenant au bord de C, 3 les points à 3 arêtes de 0, et 4 les points à 4 arêtes de 0.



Dans cette partie II, on ne suppose plus que l'individu arrête sa marche lorsqu'il atteint le bord de C et ses déplacements sur les 25 points de la grille se font désormais suivant les 2 règles suivantes :
1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).
2) à tout instant n, si l'individu est en un point M de la grille, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon à être à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des points M' de la grille distants d'une arête du point M.
On prendra garde au fait que selon les points M choisis parmi les 25 points de la grille, le nombre des points M' situés à une arête de M sur cette grille peut être égal à 2, 3 ou 4.

5°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (Y_n)
Pour tout entier naturel n, on note Y_n la variable aléatoire indiquant la position de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble {0, 1, 2, 2 B, 3, 4}.
a) Expliciter $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2\,\mathrm{B})$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 4)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B})$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.

b) Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2\,\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 3) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_n = 0) \\ \mathbb{P}(Y_n = 1) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(Y_n = 3) \\ \mathbb{P}(Y_n = 4) \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^6$ dont les composantes sont, de haut en bas, les réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B})$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.
Préciser V_0, V_1, V_2, V_3, puis $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \le n \le 3$, et vérifier enfin que $\mathbb{P}(Y_4 = 0) = \frac{7}{48}$.

6°) *Calcul des probabilités $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ de passage à l'origine*

a) Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres de M sont $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.
Etudier si la matrice M est diagonalisable.

b) Dans la suite, on désigne par P une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.
Expliciter la matrice $D = P^{-1} M P$, et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir que $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.
Déduire de cette formule l'existence de 4 nombres réels α, β, γ, δ tels que :

$$\forall\, n \ge 1, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n + \delta\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n.$$

c) En exploitant les valeurs de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \le n \le 4$ obtenues en 5°), calculer α, β, γ, δ.
En déduire, pour tout entier $n \ge 1$, que $\mathbb{P}(Y_{2n-1} = 0) = 0$ et que $\mathbb{P}(Y_{2n} = 0) = \frac{1}{10} + \frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^n$.

7°) *Nombre moyen de passages en 0 entre les instants 1 et 2n*

Pour tout entier $k \ge 0$, on note O_{2k} la variable aléatoire valant 1 si l'individu est en 0 à l'instant $2k$ et 0 sinon, et pour tout entier $n \ge 1$, on pose : $S_{2n} = O_2 + O_4 + \ldots + O_{2n} = \sum_{k=1}^{n} O_{2k}$.

a) Qu'indique concrètement la valeur prise par la variable aléatoire S_{2n}?

b) Calculer l'espérance de S_{2n}, et préciser deux réels a, b tels que $\mathbb{E}(S_{2n}) = a\,n + b + o(1)$.

8°) *Probabilités-limites des positions occupées par l'individu lorsque n tend vers $+\infty$*

a) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = 1$ dont la 1ère composante est 1.

b) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = -1$ dont la 1ère composante est 1.
Dans la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M, on choisit pour 1ère et 2ème colonnes les vecteurs propres ainsi obtenus en 8.a) et 8.b).
(On ne précisera pas les 4 colonnes suivantes de P associées aux 4 autres valeurs propres de M).

c) On admettra qu'en résolvant le système d'équations $P X = V_0$, les deux premières composantes du vecteur solution $X = P^{-1} V_0$ sont égales à $\frac{1}{20}$.
Déduire des résultats précédents les limites des vecteurs V_{2n} et V_{2n+1} lorsque n tend vers $+\infty$.
Expliciter les limites des probabilités des positions occupées par l'individu à l'instant $2n$ lorsque n tend vers $+\infty$, et à l'instant $2n + 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.