Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques.

Partie I. Etude d'une marche aléatoire

1) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

a) Quand l'individu est dans une position notée 1 à l'instant n, il a autour de lui quatre arêtes. La probabilité de suivre une des quatre arêtes est $\dfrac{1}{4}$ et une et une seule de ces arêtes amène à une position notée B. Donc $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=B)=\dfrac{1}{4}$.
De même, quand l'individu est dans une position notée 2 à l'instant n, exactement deux des quatre arêtes l'amènent en position B. Donc, $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

b) Quand l'individu est en 1, une et une seule des quatre arêtes l'amène en 0. Donc, $P_{(X_n=1)}(X_n=0)=\dfrac{1}{4}$. Ensuite, exactement deux arêtes l'amènent en 2 et donc $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\dfrac{1}{2}$.

c) $((X_n=0),(X_n=1),(X_n=2),(X_n=B))$ est un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales,

• $P(X_{n+1}=0)=P(X_n=0)\times P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)+P(X_n=1)\times P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)+P(X_n=2)\times P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)+P(X_n=B)\times P_{(X_n=B)}(X_{n+1}=0)=\dfrac{1}{4}P(X_n=1)$.
De même,
• $P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)+\dfrac{1}{2}P(X_n=2)$, $P(X_{n+1}=2)=\dfrac{1}{2}P(X_n=1)$ et $P(X_{n+1}=B)=\dfrac{1}{4}P(X_n=1)+\dfrac{1}{2}P(X_n=2)+P(X_n=B)$.

d) D'après ce qui précède, $M=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&0&0\\1&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

2) *Diagonalisation de la matrice* M

a) Il est clair que $U_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ convient.

Posons $U_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\1\end{pmatrix}$. $U_4\in\mathrm{Ker}(M)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}b=0\\a+\frac{1}{2}c=0\\\frac{1}{2}b=0\\\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b=0\\c=-2\\a=1\end{array}\right.$. Donc, $U_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Posons $U_2=\begin{pmatrix}a\\b\\-6+4\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.

$$U_2 \in \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{\sqrt{2}}I_4\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{4}b = 0 \\ a - \frac{1}{\sqrt{2}}b + \frac{1}{2}\left(-6+4\sqrt{2}\right) = 0 \\ \frac{1}{2}b - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-6+4\sqrt{2}\right) = 0 \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}\left(-6+4\sqrt{2}\right) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -6\sqrt{2}+8 \\ a = -3+2\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Donc, $U_2 = \begin{pmatrix} -3+2\sqrt{2} \\ 8-6\sqrt{2} \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcul conjugué fournit enfin $U_3 = \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 8+6\sqrt{2} \\ -6-4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

b) χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Donc, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On en déduit que $M = PDP^{-1}$.

3) *Lois des variables aléatoires* X_n

a) Puisqu'à l'instant initial, l'individu est en position 0, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = PD^nP^{-1}V_0$.

- $PD^0P^{-1}V_0 = I_4V_0 = V_0$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $V_n = PD^nP^{-1}V_0$. Alors

$$V_{n+1} = MV_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}V_0 = PD^{n+1}P^{-1}V_0.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = PD^nP^{-1}V_0$.

b)

$$\begin{aligned}
PX = V_0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-3-2\sqrt{2}\right)x_3 + x_4 = 1 \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 = 0 \\ \left(-6+4\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-6-4\sqrt{2}\right)x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-3-2\sqrt{2}\right)x_3 = 1 - x_4 \\ \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-3-2\sqrt{2}\right)x_3 = x_4 \\ \left(4-3\sqrt{2}\right)x_2 + \left(4+3\sqrt{2}\right)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = \frac{1}{2} \\ \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 + \left(-3-2\sqrt{2}\right)x_3 = \frac{1}{2} \\ \left(4-3\sqrt{2}\right)x_2 + \left(4+3\sqrt{2}\right)x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{1}{2} - x_2 - x_3 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Le déterminant du système formé des deux équations (II) et (III) du système ci-dessus est $\Delta = \left(-3+2\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right) - \left(-3-2\sqrt{2}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$. Les formules de Cramer fournissent

$$x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3-2\sqrt{2} \\ 0 & 4+3\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{-4-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

et

$$x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{vmatrix} -3+2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 4-3\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-4+3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

comme annoncé par l'énoncé. La dernière équation fournit alors $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{4} + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 1$.

Donc, $PX = V_0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $PX = V_0 \Leftrightarrow P^{-1}V_0 = X$. Donc, $P^{-1}V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (de sorte que $0^n = 0$),

$$D^n P^{-1} V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$V_n = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci fournit $P(X_n = 0) = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$ puis,

$$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= \frac{\left(-4+3\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{\left(-4-3\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} P(X_n = 2) &= \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \end{aligned}$$

et enfin $P(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ comme annoncé par l'énoncé.

d) En particulier, pour $n \geqslant 1$, $P(X_{2n} = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^n} = 0$ et $P(X_{2n-1} = 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2^n} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2^n} = 0$.

Ensuite, $\mathrm{P}\left(X_{2n-1}=1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}\right)2\times\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\mathrm{P}\left(X_{2n}=2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\dfrac{1}{2^{n}}$

4) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

a) Soit $n\geqslant 2$. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, posons $B_k=\{X_k=B\}$. Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $X_k=B\Rightarrow X_{k+1}=B$ ou encore $B_k\subset B_{k+1}$. La suite d'événements (B_k) est donc croissante pour l'inclusion.

Mais alors, $\{T\leqslant n\}=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}B_k=B_n$ puis $P(T\leqslant n)=P\left(X_n=B\right)$ ce qui reste vrai pour $n=0$ et $n=1$.

Soit $n\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}P(T=k)&=P(T\leqslant n)=P\left(X_n=B\right)\\&=1-\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}-\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}.\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sont dans $]-1,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}=0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}P(T=k)=1$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(T=n)=1$.

b) Soit $n\geqslant 1$. $\{T=2n\}=(\{X_{2n}=B\}\cap\{X_{2n-1}=1\})\cup(\{X_{2n}=B\}\cap\{X_{2n-1}=2\})$ puis, ces deux événements étant disjoints,

$$\begin{aligned}P(T=2n)&=P\left(\{X_{2n}=B\}\cap\{X_{2n-1}=1\}\right)+P\left(\{X_{2n}=B\}\cap\{X_{2n-1}=2\}\right)\\&=P\left(\{X_{2n}=B\}\cap\{X_{2n-1}=1\}\right)\ \text{(car }\{X_{2n}=B\}\cap\{X_{2n-1}=2\}\subset\{X_{2n-1}=2\}\text{ avec }P\left(X_{2n-1}=2\right)=0)\\&=P\left(\{X_{2n-1}=1\}\right)\times P_{X_{2n-1}=1}\left(X_{2n}=B\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^{n-1}}\\&=\frac{1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

c) Soit $n\geqslant 1$. $\{T=2n+1\}=(\{X_{2n+1}=B\}\cap\{X_{2n}=1\})\cup(\{X_{2n+1}=B\}\cap\{X_{2n}=2\})$ puis comme précédemment et en tenant compte de $P\left(X_{2n}=1\right)=0$

$$P(T=2n+1)=P\left(\{X_{2n}=2\}\right)\times P_{X_{2n}=2}\left(X_{2n+1}=B\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n}}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

d) En tenant compte de $P(T=0)=P(T=1)=0$,

$$\begin{aligned}E(T)&=\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(2n)P(T=2n)+\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)P(T=2n+1)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n}$ et donc, en dérivant, pour tout $x\in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^{2}}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}}=4$. Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ et finalement

$$E(T)=4,5.$$

Partie II. Etude d'une marche aléatoire

5) *Etude d'une suite variables aléatoires* Y_n

a) Comme dans la première partie, d'après la formule des probabilités totales,

- $P(Y_{n+1}=0)=\dfrac{1}{4}P(Y_n=1)$
- $P(Y_{n+1}=1)=P(Y_n=0)+\dfrac{1}{2}P(Y_n=2)+\dfrac{1}{3}P(Y_n=2B)$
- $P(Y_{n+1}=2)=\dfrac{1}{2}P(Y_n=1)+\dfrac{1}{3}P(Y_n=3)$
- $P(Y_{n+1}=2B)=\dfrac{1}{4}P(Y_n=1)+\dfrac{1}{3}P(Y_n=3)$
- $P(Y_{n+1}=3)=\dfrac{1}{2}P(Y_n=2)+\dfrac{2}{3}P(Y_n=2B)+P(Y_n=4)$
- $P(Y_{n+1}=4)=\dfrac{1}{3}P(Y_n=3)$.

b) Donc, $M=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

c) $V_0=\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ puis $V_1=\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ (V_1 est la première colonne de M) puis $V_2=\begin{pmatrix} 1/4\\0\\1/2\\1/4\\0\\0 \end{pmatrix}$. Enfin,

$$V_3=MV_2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4\\0\\1/2\\1/4\\0\\0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\7/12\\0\\0\\5/12\\0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $P(Y_1=0)=0$, $P(Y_2=0)=\dfrac{1}{4}$ et $P(Y_3=0)=0$. Enfin, $P(Y_4=0)$ est la première composante de MV_3. Cette composante est égale à $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{7}{48}$.

6) *Calcul des probabilités* $P(Y_n=0)$ *de passage à l'origine*

a) M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours égale à 1. Donc, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ si et seulement si $E_0(M)=\mathrm{Ker}(M)$ est de dimension 2 ou encore $\mathrm{rg}(M)=4$ d'après le théorème du rang. Or,

$$\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&0&0&0&0\\1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{4}&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{4}&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\ (L_1\leftrightarrow L_2)$$

$$=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{4}&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\ (L_2\leftarrow L_2-2L_1,\ L_3\leftarrow L_3-2L_1)$$

$$=2+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=2+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&0&1\\0&0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\ (\text{car } L_1=L_4 \text{ et } L_3=L_4)$$

$$=2+2=4.$$

Donc, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$.

b) $D=\operatorname{diag}\left(1,-1,\frac{\sqrt{11}}{6},-\frac{\sqrt{11}}{6},0,0\right)$ puis, comme dans la partie A, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n=PD^nP^{-1}V_0$ (avec la convention $D^0=I_6$).

Pour $n\geqslant 1$, $D^n=\operatorname{diag}\left(1,(-1)^n,\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n,\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n,0,0\right)$. $PD^nP^{-1}V_0$ est la première colonne de PD^nP^{-1} et les coefficients de cette colonne sont des combinaisons linéaires de 1, $(-1)^n$, $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n$ et $\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n$. En particulier, il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(Y_n=0)=\alpha+\beta(-1)^n+\gamma\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n+\delta\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n.$$

c) Les conditions initiales fournissent

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha-\beta+\dfrac{\sqrt{11}}{6}\gamma-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\delta=0 \quad (\mathrm{I}) \\ \alpha+\beta+\dfrac{11}{36}\gamma+\dfrac{11}{36}\delta=\dfrac{1}{4} \quad (\mathrm{II}) \\ \alpha-\beta+\dfrac{11\sqrt{11}}{216}\gamma-\dfrac{11\sqrt{11}}{216}\delta=0 \quad (\mathrm{III}) \\ \alpha+\beta+\dfrac{121}{1296}\gamma+\dfrac{121}{1296}\delta=\dfrac{7}{48} \quad (\mathrm{IV}) \end{array}\right. \quad (S).$$

$(\mathrm{III})-(\mathrm{I})$ et $\dfrac{11}{6}\times(\mathrm{I})-(\mathrm{III})$ fournissent $\delta=\gamma$ et $\beta=\alpha$. Donc,

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \beta=\alpha \\ \delta=\gamma \\ 2\alpha+\dfrac{11}{18}\gamma=\dfrac{1}{4} \\ 2\alpha+\dfrac{121}{648}\gamma=\dfrac{7}{48} \end{array}\right.$$

Ensuite, $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha+\dfrac{11}{18}\gamma=\dfrac{1}{4} \\ 2\alpha+\dfrac{121}{648}\gamma=\dfrac{7}{48} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{11}{18}-\dfrac{121}{648}\right)\gamma=\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{48} \\ 2\alpha+\dfrac{11}{18}\gamma=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{275}{648}\gamma=\dfrac{5}{48} \\ 2\alpha+\dfrac{11}{18}\gamma=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma=\dfrac{27}{110} \\ \alpha=\dfrac{1}{20} \end{array}\right.$.

Donc, pour tout $n\geqslant 1$, $P(Y_n=0)=\dfrac{1+(-1)^n}{20}+\dfrac{27}{110}\left(\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^n+\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^n\right)$.

En particulier, pour $n\geqslant 1$, $P(Y_{2n-1}=0)=0$ et

$$P(Y_{2n}=0)=\frac{1}{10}+\frac{27}{55}\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^{2n}=\frac{1}{10}+\frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^n.$$

7) *Nombre moyen de passages en* 0 *entre les instants* 1 *et* $2n$

a) S_{2n} est le nombre de passage en $(0,0)$ entre l'étape 1 et l'étape $2n$ (à une étape portant un numéro impair, on ne peut pas être en $(0,0)$).

b) Par linéarité de l'espérance, $E(S_{2n})=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(O_{2k})$ avec

$$E(O_{2k})=0\times P(Y_{2k}\neq 0)+1\times P(Y_{2k}=0)=\frac{1}{10}+\frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^k$$

puis

$$E(S_{2n})=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}+\frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^k\right)=\frac{n}{10}+\frac{27}{55}\times\frac{11}{36}\times\frac{1-\left(\dfrac{11}{36}\right)^n}{1-\dfrac{11}{36}}=\frac{n}{10}+\frac{27}{125}-\frac{27}{125}\left(\frac{11}{36}\right)^n.$$

En particulier, $E(S_{2n})\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{n}{10}+\dfrac{27}{125}+o(1)$.

8) *Probabilités-limites des positions occupées par l'individu lorsque* n *tend vers* $+\infty$

a) Soit $X=\begin{pmatrix}1\\a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}$.

$$X \in E_1(M) \Leftrightarrow (M - I_6)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 + \dfrac{1}{4}a = 0 \\ 1 - a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{3}c = 0 \\ \dfrac{1}{2}a - b + \dfrac{1}{3}d = 0 \\ \dfrac{1}{4}a - c + \dfrac{1}{3}d = 0 \\ \dfrac{1}{2}b + \dfrac{2}{3}c - d + e = 0 \\ \dfrac{1}{3}d - e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ d = 3e \\ -3 + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{3}c = 0 \\ 2 - b + e = 0 \\ 1 - c + e = 0 \\ \dfrac{1}{2}b + \dfrac{2}{3}c - 2e = 0 \end{array}\right.$$

puis

$$X \in E_1(M) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ d = 3e \\ b = 2 + e \\ e = 1 + e \\ -3 + \dfrac{1}{2}(2 + e) + \dfrac{1}{3}(1 + e) = 0 \\ \dfrac{1}{2}(2 + e) + \dfrac{2}{3}(1 + e) - 2e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ e = 2 \\ d = 6 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{array}\right.$$

Le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$.

$$X \in E_{-1}(M) \Leftrightarrow (M + I_6)X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{4}a = 0 \\ 1 + a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{3}c = 0 \\ \dfrac{1}{2}a + b + \dfrac{1}{3}d = 0 \\ \dfrac{1}{4}a + c + \dfrac{1}{3}d = 0 \\ \dfrac{1}{2}b + \dfrac{2}{3}c + d + e = 0 \\ \dfrac{1}{3}d + e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -4 \\ d = -3e \\ -3 + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{3}c = 0 \\ -2 + b - e = 0 \\ -1 + c - e = 0 \\ -a + d - 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2}b + \dfrac{2}{3}c - 2e = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -4 \\ d = -3e \\ b = 2 + e \\ c = 1 + e \\ -3 + \dfrac{1}{2}(2 + e) + \dfrac{1}{3}(1 + e) = 0 \\ \dfrac{1}{2}(2 + e) + \dfrac{2}{3}(1 + e) - 2e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -4 \\ e = 2 \\ d = -6 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{array}\right.$$

Le vecteur $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre -1.

c) $V_{2n} = PD^{2n}P^{-1}V_0$ avec $D^{2n} = \text{diag}\left(1, 1, \left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^{2n}, \left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^{2n}, 0, 0\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} D^{2n} = \text{diag}\,(1,1,0,0,0,0)$. De plus, l'application $M \mapsto PMP^{-1}V_0$ est linéaire de $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{6,1}(\mathbb{R})$ et donc continue sur $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ (car $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ est de dimension finie). Par continuité de cette application,

$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n} = P\text{diag}\,(1,1,0,0,0,0)\,P^{-1}V_0.$$

Or, $\text{diag}\,(1,1,0,0,0,0)\,P^{-1}V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \times & \times \\ 4 & 4 & & \\ 4 & -4 & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & & \\ 6 & -6 & & \\ 2 & 2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 4/10 \\ 0 \\ 3/10 \\ 0 \\ 2/10 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n+1} = P\text{diag}\,(1,-1,0,0,0,0)\,P^{-1}V_0 = \begin{pmatrix} 1/20 \\ -1/20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \times & \times \\ 4 & 4 & & \\ 4 & -4 & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & & \\ 6 & -6 & & \\ 2 & 2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/20 \\ -1/20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Au bout d'un nombre impair d'étapes grand, on a environ 2 chances sur 5 d'être en 2 et 3 chances sur 5 d'être en 3 et quasiment aucune chance d'être ailleurs.

Au bout d'un nombre pair d'étapes grand, on a environ 1 chance sur 10 d'être en 0, 4 chances sur 10 d'être en 1, 3 chances sur 10 d'être en 2B et 2 chances sur 10 d'être en 4 et quasiment aucune chance d'être ailleurs.

