E.P.I.T.A. 2020

Epreuve de mathématiques (Option - 2h)

Ce sujet a pour objet l'étude de propriétés des solutions y sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + e^t y = 0.$$

Le problème s'organise en trois parties relativement indépendantes : on étudie dans la partie I une solution particulière de l'équation (E), puis ensuite l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ (ces dernières sont en fait les restrictions à $\mathbb{R}_-$ des solutions sur $\mathbb{R}$). Dans la partie II on étudie le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de (E), et enfin dans la partie III, on étudie les zéros positifs des solutions de (E).

■ PARTIE I : Etude sur $\mathbb{R}_-$ des solutions de l'équation (E)

1°) *Etude d'une solution de (E) définie sur* $\mathbb{R}$

Dans cette question, on considère la somme de la série entière suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n.$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b) On considère alors la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = S(e^t)$.
Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser sous forme d'une série $f''(t)$.
Expliciter alors sans signe $\sum$ l'expression $f''(t) + e^t f(t)$ et conclure.

c) Déterminer la limite éventuelle de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

d) En regroupant deux par deux les termes de la série définissant $f(t)$, démontrer que $f(t) > 0$ pour tout réel $t \leq 0$. En procédant par exemple de façon analogue, déterminer le signe de f' pour tout réel $t \leq 0$ et le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_-$.

2°) *Etude d'une solution de (E) définie sur* $\mathbb{R}_-$

Le résultat précédent établissant que f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_-$ autorise à poser :

$$\forall\, t \leq 0, \quad g(t) = f(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)}.$$

a) Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ et en déduire $g''(t) + e^t g(t)$ pour $t \leq 0$.

b) Préciser le signe de $g(t)$ pour $t \leq 0$ et démontrer l'équivalence $g(t) \sim -t$ quand t tend vers $-\infty$.

3°) *Etude des solutions de (E) sur* $\mathbb{R}_-$

a) Justifier l'indépendance linéaire de la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ et de g.
Expliciter la forme générale des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_-$.

b) Préciser quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui ont une limite finie en $-\infty$, les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui sont bornées, les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui tendent vers $\pm\infty$ en $-\infty$.

■ PARTIE II : Etude asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation (E)

4°) *Limite en $+\infty$ des solutions de (E)*

A toute solution $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de (E), on associe la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t)\, e^{t/5}$.

a) Exprimer y, y', y'' en fonction des dérivées z, z', z'', puis en tenant compte du fait que y est solution de (E), exprimer z en fonction de z' et z''.

b) En déduire l'égalité suivante pour tout $t \geq 0$:

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, \mathrm{d}\tau - \int_0^t \frac{2\, z'(\tau)\, z''(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, \mathrm{d}\tau.$$

c) A l'aide d'une intégration par parties de la dernière intégrale, en déduire pour tout $t \geq 0$:

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{25}{26}\, z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{\left(e^\tau - \frac{4}{25}\right)}{\left(e^\tau + \frac{1}{25}\right)^2}\, z'^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

d) En déduire que z est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et qu'on a pour tout $t \geq 0$:

$$|y(t)| \leq e^{-t/5}\sqrt{z^2(0) + \frac{25}{26}\, z'^2(0)}\ .$$

Préciser alors la limite de toute solution y de (E) en $+\infty$.

■ PARTIE III : Etude des zéros sur $\mathbb{R}_+$ des solutions de l'équation (E)

5°) *Premières propriétés des zéros des solutions non nulles de (E)*

a) Rappeler l'énoncé précis du théorème de Cauchy-Lipschitz concernant l'équation linéaire (E).

b) Etant donné un réel t_0, en déduire les solutions y de (E) vérifiant $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.
En déduire que si une solution non nulle y de (E) s'annule en t_0, elle change de signe en t_0.

c) On suppose qu'il existe un segment $[a, b]$ ($a < b$) dans lequel une solution *non nulle* y de (E) s'annule une infinité de fois, de sorte qu'on peut construire une suite (t_n) de zéros deux à deux distincts de cette solution y appartenant à $[a, b]$.

- Justifier l'existence d'une suite $\left(t_{\varphi(n)}\right)$ extraite de (t_n) qui converge vers un réel t de $[a, b]$.
- Justifier, pour tout entier naturel n, que y' s'annule au moins une fois en un réel $c_{\varphi(n)}$ dans l'intervalle ouvert $\left]\, t_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n+1)}\right[$ ou $\left]\, t_{\varphi(n+1)}, t_{\varphi(n)}\right[$ selon l'ordre des réels $t_{\varphi(n)}$ et $t_{\varphi(n+1)}$.
- Montrer qu'on a $y(t) = y'(t) = 0$, puis en déduire que y est la solution nulle.
- Qu'en déduit-on?

6°) *Existence d'un zéro strictement positif d'une solution non nulle*

Soit une solution non nulle $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + e^t\, y = 0$.
On considère aussi la solution $z : t \mapsto \sin(t)$ de l'équation $z'' + z = 0$.

a) Exprimer la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t)$ en fonction de y et z.

b) On suppose que y ne s'annule pas sur $]\, 0, \pi]$ et garde un signe strictement positif par exemple (ce qu'il est possible de supposer, quitte à changer y en $-y$).
Préciser le signe de W' sur $]\, 0, \pi[$, les valeurs de $W(0)$ et $W(\pi)$.
Conclure à une contradiction et en déduire que y s'annule au moins une fois dans $]\, 0, \pi]$.

c) Compte tenu de l'ensemble des résultats précédents, justifier l'existence d'un plus petit zéro strictement positif de y qu'on note désormais t_1 et qui appartient à $]\, 0, \pi]$.

7°) *Existence d'une suite croissante de zéros d'une solution non nulle dans* $\mathbb{R}_+$

Soit une solution non nulle $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + e^t\, y = 0$, et on désigne toujours par t_1 le plus petit zéro strictement positif de y.

On considère aussi la solution $z : t \mapsto \sin\left(e^{\frac{t_1}{2}}(t - t_1)\right)$ de l'équation $z'' + e^{t_1}\, z = 0$.

a) Exprimer la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t)$ en fonction de y et z.

b) On suppose que y ne s'annule pas sur $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right]$ et garde un signe qu'on peut toujours supposer strictement positif par exemple, quitte à changer y en $-y$.

Préciser le signe de W' sur $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right[$ et les valeurs de $W(t_1)$ et $W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi\right)$.

En déduire de même que y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right]$.

c) Justifier l'existence d'un plus petit zéro strictement supérieur à t_1 de y qu'on note désormais t_2 et qui appartient à $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right]$.

d) En déduire que les zéros strictement positifs de y peuvent être classés en une suite réelle (t_n) strictement croissante telle qu'on ait pour tout entier $n \geq 1$: $t_{n+1} - t_n \leq \pi\, e^{-\frac{t_n}{2}}$.

e) On suppose la suite croissante (t_n) majorée, de sorte qu'elle converge vers une limite finie L.

Montrer que L est un zéro de y, et établir que y admet au moins un zéro dans $\left] L, L + e^{-\frac{L}{2}} \pi \right]$.

En déduire une contradiction, et montrer que $\lim t_n = +\infty$, puis que $\lim(t_{n+1} - t_n) = 0$.

f) Donner l'allure de la courbe représentative sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie I.