Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

Partie I. Etude sur $\mathbb{R}_-$ des solutions de l'équation (E)

1) *Etude d'une solution de* (E) *définie sur* $\mathbb{R}$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. D'après la règle de d'Alembert, $R_a = +\infty$.

b) La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ici, la fonction S est de classe C^∞ sur $]-R_a, R_a[= \mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, $f = S \circ \exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel t, $f'(t) = e^t S'\left(e^t\right)$ puis

$$\begin{aligned}
f''(t) &= e^t S'\left(e^t\right) + e^{2t} S''\left(e^t\right) = e^t \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(e^t\right)^{n-1} + e^{2t}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(e^t\right)^{n-2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(e^t\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(e^t\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n!)^2}\left(e^t\right)^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{((n-1)!)^2}\left(e^t\right)^n\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(e^t\right)^{m+1} \text{ (en posant } m = n-1)\\
&= -e^t\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(e^t\right)^m = -e^t f(t).
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout réel t, $f''(t) + e^t f(t) = 0$. La fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue en 0. Par suite,

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = \frac{(-1)^0}{0!^2} = 1.$$

d) Soit $t \leqslant 0$. Puisque la série ci-dessous converge, on peut associer les termes de cette série deux à deux et on obtient

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}e^{nt} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{2p}}{((2p)!)^2}e^{2pt} + \frac{(-1)^{2p+1}}{((2p+1)!)^2}e^{(2p+1)t}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\left((2p+1)^2 - e^t\right)\frac{e^{2pt}}{(2p+1)!^2}\\
&\geqslant \sum_{p=0}^{+\infty}\left((2p+1)^2 - 1\right)\frac{e^{2pt}}{(2p+1)!^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left((2p+1)^2 - 1\right)\frac{e^{2pt}}{(2p+1)!^2}\\
&> 0.
\end{aligned}$$

La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_-$.

Soit $t \leqslant 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(t) = e^t S'\left(e^t\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} e^{nt} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{2p-1}(2p-1)}{((2p-1)!)^2} e^{(2p-1)t} + \frac{(-1)^{2p}(2p)}{((2p)!)^2} e^{2pt}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-(2p-1)(2p) + e^t\right) \frac{e^{(2p-1)t}}{(2p)!(2p-1)!} \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-(2p-1)(2p) + 1\right) \frac{e^{(2p-1)t}}{(2p)!(2p-1)} \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2) *Etude d'une solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}_-$

a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_-$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-$. Donc, la fonction $\dfrac{1}{f^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ puis la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-$ et il en est de même de la fonction g. De plus, pour tout réel $t \leqslant 0$,

$$g'(t) = f'(t) \int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} - f(t)\frac{1}{f^2(t)} = f'(t) \int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} - \frac{1}{f(t)}.$$

De même, g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-$ et pour tout réel $t \leqslant 0$,

$$g''(t) = f''(t) \int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} - \frac{f'(t)}{f^2(t)} + \frac{f'(t)}{f^2(t)} = f''(t) \int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} = -e^t f(t) \int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} = -e^t g(t).$$

La fonction g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_-$.

b) $g(0) = 0$. D'autre part, si $t < 0$, $\displaystyle\int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur un intervalle de longueur non nulle. Puisque d'autre part, f est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, la fonction g est strictement positive sur $]-\infty, 0[$.

D'après la question 1)c), $\dfrac{1}{f^2(\tau)} \underset{\tau \to -\infty}{\sim} \dfrac{1}{1^2} = 1 > 0$ et de plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 1\, d\tau$ est une intégrale divergente. D'après les règles de sommation des relations de comparaison, $\displaystyle\int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} \underset{t \to -\infty}{\sim} \int_t^0 1\, d\tau = -t$ puis $g(t) = f(t) \displaystyle\int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} \underset{t \to -\infty}{\sim} 1 \times (-t) = -t$.

3) *Etude des solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}_-$

a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \geqslant 0$, $\lambda f(t) + \mu g(t) = 0$. Alors, pour tout $t \leqslant 0$, $f(t)\left(\lambda + \mu \displaystyle\int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)}\right) = 0$ puis, pour tout $t \leqslant 0$, $\lambda + \mu \displaystyle\int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)} = 0$ car la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-$.

Quand $t = 0$, on obtient $\lambda = 0$. Il reste : pour tout $t \leqslant 0$, $\mu g(t) = 0$ puis $\mu = 0$ car la fonction g n'est pas la fonction nulle.

L'équation (E) s'écrit $y'' + ay' + by = 0$ où $a : t \mapsto 0$ et $b : t \mapsto e^t$. Les deux fonctions a et b sont continues sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_-$. On sait que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. D'après ce qui précède, la famille (f, g) est une famille libre de solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$. On en déduit que la famille (f, g) est une base de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$. Par suite, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ sont les fonctions de la forme $\lambda f + \mu g$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

b) On a vu que $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 1$ et que $g(t) \underset{t \to 0}{\sim} -t$ ce qui fournit en particulier $\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = +\infty$. Soient alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis $h = \lambda f + \mu g$.
Si $\mu \neq 0$, la fonction h est équivalente à la fonction μg en $-\infty$. Dans ce cas, h tend vers $\pm\infty$ en $-\infty$ et en particulier, h n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_-$.
Si $\mu = 0$, $h = \lambda f$ tend vers λ en $-\infty$. Dans ce cas, h a une limite finie en $-\infty$ et est continue sur $]-\infty, 0]$. on en déduit que h est bornée sur $]-\infty, 0]$.

Partie II. Etude asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation (E)

4) *Limite en $+\infty$ des solutions de* (E)

a) Si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $z\ :\ t \mapsto y(t)e^{t/5}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $y \mapsto t \mapsto z(t)e^{-t/5}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t, $y(t) = z(t)e^{-t/5}$ puis $y'(t) = z'(t)e^{-t/5} - \dfrac{1}{5}z(t)e^{-t/5}$ puis $y''(t) = \dfrac{1}{25}z(t)e^{-t/5} - \dfrac{2}{5}z'(t)e^{-t/5} + z''(t)e^{-t/5}$ (d'après la formule de Leibniz). Ensuite, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}0 = y''(t) + e^t y(t) &= \frac{1}{25}z(t)e^{-t/5} - \frac{2}{5}z'(t)e^{-t/5} + z''(t)e^{-t/5} + e^t z(t)e^{-t/5}\\ &= \left(\frac{1}{25} + e^t\right)z(t)e^{-t/5} - \frac{2}{5}z'(t)e^{-t/5} + z''(t)e^{-t/5}\end{aligned}$$

puis

$$z(t) = \frac{2}{5}\frac{z'(t)}{e^t + \dfrac{1}{25}} - \frac{z''(t)}{e^t + \dfrac{1}{25}}.$$

b) On multiplie les deux membres de cette égalité par $2z'$. On obtient pour tout réel τ,

$$2z'(\tau)z(\tau) = \frac{4}{5}\frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}} - \frac{2z'(\tau)z''(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}.$$

Pour $t \geqslant 0$, on intègre entre 0 et t. En tenant compte de $\displaystyle\int_0^t 2z'(\tau)z(\tau)\ d\tau = \left[z^2(\tau)\right]_0^t = z^2(t) - z^2(0)$, on obtient

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\ d\tau - \int_0^t \frac{2z'(\tau)z''(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\ d\tau.$$

c) Soit $t \geqslant 0$. Les deux fonctions $\tau \mapsto z'^2(\tau)$ et $\tau \mapsto \dfrac{1}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, t]$. On peut donc effectuer une intégration par parties. On obtient

$$\int_0^t \frac{2z'(\tau)z''(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\ d\tau = \left[\frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\right]_0^t - \int_0^t \frac{z'^2(\tau)\left(-e^\tau\right)}{\left(e^\tau + \dfrac{1}{25}\right)^2}\ d\tau$$

et donc

$$\begin{aligned}z^2(t) &= z^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\ d\tau - \int_0^t \frac{2z'(\tau)z''(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\ d\tau\\ &= z^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \dfrac{1}{25}}\ d\tau - \frac{z'^2(t)}{e^t + \dfrac{1}{25}} + \frac{z'^2(0)}{1 + \dfrac{1}{25}} - \int_0^t \frac{z'^2(\tau)e^\tau}{\left(e^\tau + \dfrac{1}{25}\right)^2}\ d\tau\\ &= z^2(0) + \frac{25}{26}z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + \dfrac{1}{25}} + \int_0^t \frac{z'^2(\tau)\left(\dfrac{4}{5}\left(e^\tau + \dfrac{1}{25}\right) - e^\tau\right)}{\left(e^\tau + \dfrac{1}{25}\right)^2}\ d\tau\\ &= z^2(0) + \frac{25}{26}z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + \dfrac{1}{25}} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{z'^2(\tau)\left(e^\tau - \dfrac{4}{25}\right)}{\left(e^\tau + \dfrac{1}{25}\right)^2}\ d\tau.\end{aligned}$$

d) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout réel $\tau \in [0, t]$, $e^{\tau} \geqslant 1 \geqslant \dfrac{4}{25}$ et donc $\dfrac{z'^2(\tau)\left(e^{\tau} - \dfrac{4}{25}\right)}{\left(e^{\tau} + \dfrac{1}{25}\right)^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégration et en tenant compte de $t \geqslant 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^t \dfrac{z'^2(\tau)\left(e^{\tau} - \dfrac{4}{25}\right)}{\left(e^{\tau} + \dfrac{1}{25}\right)^2}\,d\tau \geqslant 0$. Ensuite, $\dfrac{z'^2(t)}{e^t + \dfrac{1}{25}} \geqslant 0$ et finalement

$$z^2(t) \leqslant z^2(0) + \frac{26}{25}z'^2(0).$$

En prenant la racine carrée des deux membres, on obtient $|z(t)| = \sqrt{z'^2(t)} \leqslant \sqrt{z^2(0) + \dfrac{26}{25}z'^2(0)}$ et en multipliant les deux membres par le réel positif $e^{-t/5}$, on obtient finalement

$$|y(t)| \leqslant e^{-t/5}\sqrt{z'^2(t)} \leqslant e^{-t/5}\sqrt{z^2(0) + \frac{26}{25}z'^2(0)}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-t/5}\sqrt{z^2(0) + \frac{26}{25}z'^2(0)} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Ainsi, toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ tend vers 0 en $+\infty$.

Partie III. Etude des zéros sur $\mathbb{R}_+$ des solutions de l'équation (E)

5) *Premières propriétés des zéros des solutions non nulles de* (E)

a) Les deux fonctions $a : t \mapsto 0$ et $b : t \mapsto e^t$ sont continues sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Pour tout $(t_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ et une seule telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$.

b) La fonction nulle est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. C'est la seule d'après le théorème de Cauchy.

Soit y une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $y(t_0) = 0$. D'après ce qui précède, $y'(t_0) \neq 0$ (car si $y'(t_0) = 0$, y est la fonction nulle).
Si $y'(t_0) > 0$, par continuité de y' sur $\mathbb{R}$ (y étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$) et donc en t_0, il existe un réel strictement positif r tel que, pour tout réel $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, $y'(t) > 0$. Dans ce cas, y s'annule en t_0 et est strictement croissante sur un voisinage de t_0. Une telle fonction change de signe en t_0.
Si $y'(t_0) < 0$, la fonction $-y$ est dans la situation précédente. Elle change de signe en t_0 et il en est de même de la fonction y.

c) Pour tout entier naturel n, $a \leqslant t_n \leqslant b$. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de réels. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $\left(t_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain réel t tel que $a \leqslant t \leqslant b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note a_n le plus petit des deux réels $t_{\varphi(n)}$ et $t_{\varphi(n+1)}$ et a_{n+1} le plus grand de sorte que $a_n < a_{n+1}$. La fonction y est continue sur $[a_n, a_{n+1}]$, dérivable sur $]a_n, a_{n+1}[$ et prend la même valeur en a_n et a_{n+1} (car s'annule en ces deux réels). D'après le théorème de Rolle, il existe $c_{\varphi(n)} \in]a_n, a_{n+1}[$ tel que $y'\left(c_{\varphi(n)}\right) = 0$.

Puisque la suite (t_n) converge vers le réel t, la suite extraite $\left(t_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers le réel t. Il en est de même de a_n et a_{n+1} ($a_n = \dfrac{1}{2}\left(t_{\varphi(n)} + t_{\varphi(n+1)} - \left|t_{\varphi(n)} - t_{\varphi(n+1)}\right|\right)$ et $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(t_{\varphi(n)} + t_{\varphi(n+1)} + \left|t_{\varphi(n)} - t_{\varphi(n+1)}\right|\right)$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant c_{\varphi(n)} \leqslant a_{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite $\left(c_{\varphi(n)}\right)$ converge vers le réel t. Par continuité de la fonction y' en t (car y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$), on a

$$y'(t) = y'\left(\lim_{n\to+\infty} c_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} y'\left(c_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

De même, par continuité de y en t,

$$y(t) = y\left(\lim_{n\to+\infty} t_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} y\left(t_{\varphi(n)}\right) = 0.$$

Ainsi, si y est une solution de (E) s'annulant une infinité de fois dans un segment $[a, b]$, alors il existe un réel t tel que $y(t) = y'(t) = 0$. D'après le théorème de Cauchy, y est la fonction nulle. Par contraposition, si y est une solution non nulle de (E), y s'annule un nombre fini de fois (éventuellement nul) dans tout segment de $\mathbb{R}$.

6) *Existence d'un zéro strictement positif d'une solution non nulle*

a) Pour tout réel t, $W(t) = \cos(t)y(t) - \sin(t)y'(t)$ puis

$$W'(t) = -\sin(t)y(t) + \cos(t)y'(t) - \cos(t)y'(t) - \sin(t)y''(t) = -\sin(t)(y(t) + y''(t)) = \sin(t)\left(e^t - 1\right)y(t).$$

(Variante : $W = yz' - y'z$ puis $W' = yz'' + y'z' - y'z' - y''z = yz'' - y''z = -yz + e^t yz = yz\left(e^t - 1\right)$).

b) Pour tout réel $t \in]0, \pi[$, $W'(t) = \sin(t)\left(e^t - 1\right)y(t) > 0$. Mais $W(0) = y(0) > 0$ et $W(\pi) = -y(\pi) < 0$. Ainsi, la fonction W croît d'un réel strictement positif à un réel strictement négatif. Ceci est une contradiction et donc la fonction y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]0, \pi]$.

c) D'après la question 5)c), la fonction y s'annule un nombre fini de fois dans le segment $[0, \pi]$ et donc dans l'intervalle $]0, \pi]$. Puisque d'autre part, la fonction y s'annule au moins une fois dans $]0, \pi]$. L'ensemble des zéros de la fonction y dans $]0, \pi]$ est donc un ensemble de réels fini et non vide. Cet ensemble admet un plus petit élément que l'on note t_1.

7) *Existence d'une suite croissante de zéros d'une solution non nulle dans* $\mathbb{R}_+$

a) Comme plus haut, pour tout réel t, $W'(t) = y(t)z''(t) - y''(t)z(t) = -e^{t_1}y(t)z(t) + e^t y(t)z(t) = \left(e^t - e^{t_1}\right)y(t)z(t)$.

b) Si $t \in \left]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right[$, alors $e^{\frac{t_1}{2}}\left(t - t_1\right) \in]0, \pi[$ puis $z(t) = \sin\left(e^{\frac{t_1}{2}}\left(t - t_1\right)\right) > 0$. Par suite, pour tout réel $t \in \left]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right[$, $W'(t) = \left(e^t - e^{t_1}\right)y(t)z(t) > 0$ (car $t > t_1 \Rightarrow e^t - e^{t_1} > 0$). La fonction W est strictement croissante sur $\left[t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$.

Puisque $z\left(t_1\right) = \sin(0) = 0$ et $y\left(t_1\right) = 0$, on a encore $W\left(t_1\right) = y\left(t_1\right)z'\left(t_1\right) - y'\left(t_1\right)z\left(t_1\right) = 0$. De même, $z\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) = \sin(\pi) = 0$ et $z'\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) = e^{\frac{t_1}{2}}\cos(\pi) = -e^{\frac{t_1}{2}}$. Donc, $W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) = -e^{\frac{t_1}{2}}y\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) < 0$. En résumé, $W\left(t_1\right) = 0$ et $W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right) < 0$. Ceci contredit le fait que la fonction W est strictement croissante sur $\left[t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$. Donc, la fonction y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $\left]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right]$.

c) Comme à la question 6)c), la fonction y admet un plus petit zéro, noté t_2, dans l'intervalle $\left]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\right]$. Le réel t_2 vérifie $t_1 < t_2 \leqslant t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi$.

d) Soit $n \geqslant 1$. On suppose avoir trouvé des zéros t_1, t_2, ..., t_n, des zéros où pour tout $k < n$, t_{k+1} est le plus petit zéro de y élément de $\left]t_k, t_k + e^{-\frac{t_k}{2}}\pi\right]$. La même démarche que ci-dessus en remplaçant t_1 par t_n et t_2 par t_{n+1} montre que y admet un plus petit zéro, noté t_{n+1}, dans l'intervalle $\left]t_n, t_n + e^{-\frac{t_n}{2}}\pi\right]$.

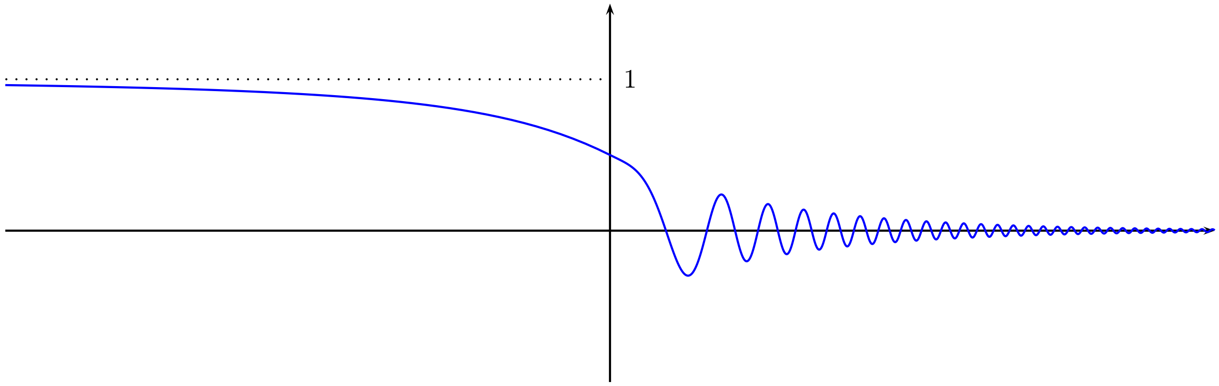
e) Par continuité de y en L, $y(L) = y\left(\lim\limits_{n\to+\infty} t_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} y\left(t_n\right) = 0$. La même démarche que ci-dessus où on remplace t_1 par L montre que y s'annule au moins une fois dans $\left]L, L + e^{-\frac{L}{2}}\pi\right]$. Ceci est une contradiction car, par construction, tous les zéros de y sont inférieurs ou égaux à L.

Ainsi, la suite $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et non majorée. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

Puisque pour tout entier naturel n, $0 \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \pi e^{-\frac{t_n}{2}}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi e^{-\frac{t_n}{2}} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(t_{n+1} - t_n\right) = 0$.

f) On sait que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, tend vers 1 en $-\infty$ et que $f(0) = S(1) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!^2} \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ (inégalités usuelles sur les séries alternées.) On sait que pour tout réel positif t, $|f(t)| \leqslant e^{-t/5}\sqrt{f^2(0) + \dfrac{25}{26}f'^2(0)}$ et en particulier que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

On sait que f s'annule une première fois sur $]0, \pi]$ en un réel t_1 puis que les zéros de y s'ordonnent en une suite strictement croissante de réels $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(t_{n+1} - t_n\right) = 0$ et que f change de signe en chacun de ses zéros. Le graphe de f a donc probablement l'allure suivante.


1

