Antilles-Guyane 2019. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0;0,5)$. Donc, $f(0) = 0,5$. Ceci fournit $\dfrac{a}{1+e^0} = 0,5$ puis $\dfrac{a}{2} = 0,5$ puis $a = 2 \times 0,5 = 1$. Donc, $a = 1$

2) Pour tout réel positif x,

$$f'(x) = -\frac{\left(1+e^{-bx}\right)'}{\left(1+e^{-bx}\right)^2} = -\frac{0+(-bx)'e^{-bx}}{\left(1+e^{-bx}\right)^2} = -\frac{-be^{-bx}}{\left(1+e^{-bx}\right)^2} = \frac{be^{-bx}}{\left(1+e^{-bx}\right)^2}.$$

3) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 est $f'(0)$. D'après la question précédente, $f'(0) = \dfrac{be^0}{\left(1+e^0\right)^2} = \dfrac{b}{4}$.

Puisque cette tangente est la droite (AB), ce coefficient directeur est aussi

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0,5}{10-0} = 0,05.$$

On en déduit alors que $\dfrac{b}{4} = 0,05$ puis que $b = 4 \times 0,05 = 0,2$. Finalement,

$$\text{pour tout réel } x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}.$$

Partie B

1) La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 est

$$p(10) = \frac{1}{1+e^{-0,2\times 10}} = \frac{1}{1+e^{-2}} = 0,88 \text{ arrondi au centième.}$$

2) a) D'après la question 2) de la partie A, pour tout réel positif x,

$$p'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{\left(1+e^{-0,2x}\right)^2}.$$

Pour tout réel positif x, on a $p'(x) > 0$ et donc la fonction p est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} p(x) = \frac{1}{1+0} = 1$.

c) Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, presque tous les individus sont équipés.

3) Soit x un réel positif.

$$\begin{aligned}
p(x) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-0,2x}} \geqslant 0,95 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{0,95} \geqslant 1+e^{-0,2x} \text{ (car } 1+e^{-0,2x} > 0) \\
&\Leftrightarrow e^{-0,2x} \leqslant \frac{1}{0,95} - 1 \Leftrightarrow e^{-0,2x} \leqslant \frac{0,05}{0,95} \Leftrightarrow e^{-0,2x} \leqslant \frac{1}{19} \\
&\Leftrightarrow -0,2x \leqslant \ln\left(\frac{1}{19}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow -0,2x \leqslant -\ln(19) \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{0,2}\ln(19) \Leftrightarrow x \geqslant 5\ln(19).
\end{aligned}$$

La calculatrice fournit $5\ln(19) = 14,72\ldots$. Donc, la proportion d'individus équipés dépasse $0,95$ au cours de l'année 2014.

4) a) Soit x un réel positif.

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{0,2x}}} = \frac{1}{\dfrac{1+e^{0,2x}}{e^{0,2x}}} = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}.$$

b) Plus précisément, pour tout réel positif x, $p(x) = \dfrac{1}{0,2} \times \dfrac{0,2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}} = 5\dfrac{0,2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{0,2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$ est du type $\dfrac{u'}{u}$ où u est la fonction strictement positive $x \mapsto 1+e^{0,2x}$. Donc, une primitive de la fonction p sur $[0,+\infty[$ est la fonction $x \mapsto 5\ln\left(1+e^{0,2x}\right)$.

c) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[5\ln\left(1+e^{0,2x}\right)\right]_{8}^{10} = \frac{5}{2}\left(\ln\left(1+e^{2}\right) - \ln\left(1+e^{1,6}\right)\right) \\ &= 0,86 \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

La proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 est $0,86$ arrondi au centième.

EXERCICE 2

Partie A

1) Le point A a pour coordonnées $(2\ ;4\ ;0,25)$ et le point B a pour coordonnées $(2\ ;6\ ;0,75)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0\ ;2\ ;0,5)$. La droite (AB) est la droite passant par le point $A(2\ ;4\ ;0,25)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(0\ ;2\ ;0,5)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2) a) Les points P, Q et U ont pour coordonnées respectives $(0\ ;10\ ;0)$, $(0\ ;11\ ;1)$ et $(10\ ;10\ ;0)$. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(0\ ;1\ ;1)$ et le vecteur $\overrightarrow{PU}$ a pour coordonnées $(10\ ;0\ ;0)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PQ} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PU} = 0 \times 10 + 1 \times 0 + (-1) \times 0 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PU}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (PQU). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (PQU).

b) Le plan (PQU) est le plan passant par le point $P(0\ ;10\ ;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0\ ;1\ ;-1)$. Une équation cartésienne du plan (PQU) est $0 \times (x - 0) + 1 \times (y - 10) + (-1) \times (z - 0) = 0$ ou encore $y - z - 10 = 0$.

3) Soit $M(2; 4 + 2t; 0,25 + 0,5t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB).

$$M \in (PQU) \Leftrightarrow (4 + 2t) - (0,25 + 0,5t) - 10 = 0 \Leftrightarrow 1,5t - 6,25 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6,25}{1,5} \Leftrightarrow t = \frac{25}{6}.$$

Ainsi, la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants en un point I obtenu avec $t = \dfrac{25}{6}$. I est le point de coordonnées $(2; 4 + 2 \times \dfrac{25}{6}; 0,25 + 0,5 \times \dfrac{25}{6})$ ou encore $\left(2; \dfrac{37}{3}; \dfrac{28}{12}\right)$ ou enfin $\left(2; \dfrac{37}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$.

4) Le point I est le point d'intersection du plan de l'obstacle et de la trajectoire du drone d'Alex.
La hauteur du point I est $z_I = \dfrac{7}{3}$. L'obstacle est quant à lui constitué de points du plan (PQU) dont la hauteur z est inférieure ou égal à 1. Puisque $\dfrac{7}{3} > 1$, le point I n'appartient pas à l'obstacle ou encore la trajectoire du drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B

1) D'après la question 1) de la partie A, le point M a pour coordonnées $(2; 4 + 2a; 0,25 + 0,5a)$. Ensuite, les points C et D ont pour coordonnées respectives $(4; 6; 0,25)$ et $(2; 6; 0,25)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(-2; 0; 0)$. Notons alors (x, y, z) les coordonnées de N. On a $x - x_C = bx_{\overrightarrow{CD}}$ puis $x = 4 - 2b$. De même, $y = 6$ et $z = 0,25$. Le point N a pour coordonnées $(4 - 2b; 6; 0,25)$.

En résumé, le point M a pour coordonnées $(2; 4 + 2a; 0,25 + 0,5a)$ et le point N a pour coordonnées $(4 - 2b; 6; 0,25)$. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M)$ ou encore $(2 - 2b; 2 - 2a; -0,5a)$.

2) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = (2 - 2b) \times 0 + (2 - 2a) \times 2 + (-0,5a) \times 0,5 = 4 - 4a - 0,25a = 4 - 4,25a$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = (2 - 2b) \times (-2) + (2 - 2a) \times 0 + (-0,5a) \times 0 = -4 + 4b$. D'après les différents résultats admis par l'énoncé,

$$MN \text{ minimale} \Leftrightarrow (MN) \perp (AB) \text{ et } (MN) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4,25a = 0 \text{ et } -4 + 4b = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{4}{4,25} \text{ et } b = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4 \times 4}{4,25 \times 4} \text{ et } b = 1 \Leftrightarrow a = \frac{16}{17} \text{ et } b = 1.$$

3) Quand $a = \dfrac{16}{17}$ et $b = 1$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\left(2 - 2 \times 1, 2 - 2 \times \dfrac{16}{17}, -0,5 \times \dfrac{16}{17}\right)$ ou encore $\left(0, \dfrac{2}{17}, -\dfrac{8}{17}\right)$. La distance minimale cherchée est donc

$$\sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{1}{17}\sqrt{2^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{68}}{17} = 0,48\ldots.$$

L'unité du repère est la dizaine de mètres. La distance minimale entre les deux trajectoires est donc supérieure à $4,8$ mètres et en particulier est supérieure à 4 mètres. Donc la consigne est respectée.

EXERCICE 3

1) $c = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

L'affirmation 1 est fausse.

2) Soit n un entier naturel.

$$c^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \frac{1}{2^{3n}}e^{in\pi} = \frac{1}{2^{3n}}\left(e^{i\pi}\right)^{n} = \frac{1}{2^{3n}}(-1)^n.$$

Donc, c^{3n} est un nombre réel.

L'affirmation 2 est vraie.

3) $c^2 = \dfrac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} + i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ et $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Les coordonnées du point S sont $\left(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$ et les coordonnées du point T sont $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OS}$ sont $\left(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OT}$ sont $\left(1, -\sqrt{3}\right)$. Or

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{8} & 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{8} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} = 0.$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires ou encore les points O, S et T sont alignés.

L'affirmation 3 est vraie.

4) $|c| = \left|\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \dfrac{1}{2}$ puis, pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $\left|c^k\right| = |c|^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. Par suite,

$$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + |c^n| = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 4.

1) a) Soit n un entier naturel. (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p(A_{n+1}) \\ &= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0,5 + b_n \times (1 - 0,2 - 0,7) + c_n \times 0,2 = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n. \end{aligned}$$

b) Soit n un entier naturel. $p(A_n) + p(B_n) + p(C_n) = 1$ et donc $a_n + b_n + c_n = 1$ puis $c_n = 1 - a_n - b_n$. On en déduit que

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2(1 - a_n - b_n) = 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2.$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n + 0,2 \\ 0,2a_n + 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3a_n - 0,1b_n \\ 0,2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} \\ &= MU_n + R. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Y = MY + R &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ 0,2\alpha + 0,2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0,3\alpha - 0,1\beta + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0,3\alpha - 0,1(0,2\alpha + 0,2) + 0,2 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1 - 0,28)\alpha = 0,18 \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{0,18}{0,72} \\ \beta = 0,2\alpha + 0,2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0,25 \\ \beta = 0,2 \times 0,25 + 0,2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0,25 \\ \beta = 0,25 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - Y = (MU_n + R) - (MY + R) = M(U_n - Y) = MV_n.$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.

- $V_1 = MV_0 = M^1 V_0$. La formule est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $V_n = M^n V_0$. Alors, $V_{n+1} = MV_n = M \times M^n V_0 = M^{n+1} V_0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.

4) a) D'après les questions précédentes et le résultat admis par l'énoncé,

$$V_n = \begin{pmatrix} a_n - 0,25 \\ b_n - 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0,2^n - 0,1^n & 0,1^n - 0,2^n \\ 2 \times 0,2^n - 2 \times 0,1^n & 2 \times 0,1^n - 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 0,25 \\ 0 - 0,25 \end{pmatrix}$$

puis

$$a_n = 0,25 + 0,75 \times (2 \times 0,2^n - 0,1^n) - 0,25 \times (0,1^n - 0,2^n) = 0,25 + 1,75 \times 0,2^n - 0,1^n.$$

b) Puisque $-1 < 0,2 < 1$ et $-1 < 0,1 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,25$.

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} c_n > 0,5 &\Leftrightarrow 0,5 + 3 \times 0,1^n - 3,5 \times 0,2^n \Leftrightarrow 3 \times 0,1^n > 3,5 \times 0,2^n \Leftrightarrow \frac{3}{3,5} > \frac{0,2^n}{0,1^n} \\ &\Leftrightarrow 2^n < \frac{3}{3,5}. \end{aligned}$$

Mais $\dfrac{3}{3,5} < 1$ et d'autre part, pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant 1$. Donc, l'inéquation ci-dessus n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours ne dépassera jamais $0,5$.

