Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques.

Partie I. Premières propriétés des fonctions S_α, $(\alpha > 0)$

1) *Etude du cas particulier de la fonction* S_1

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

La série géométrique de terme général $e^{-nx} = \left(e^{-x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si $-1 < e^{-x} < 1$. Cette dernière condition équivaut à $x > 0$. Ainsi, $S_1(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

Soit donc $x > 0$. $S_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

$$\boxed{S_1 \text{ est définie sur }]0,+\infty[\text{ et pour } x > 0,\ S_1(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}.}$$

b) $S_1(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}} = -\dfrac{1}{e^{-x}-1} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. En particulier, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_1(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_1(x) = +\infty \text{ et } S_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S_1(x) = 1$. Ensuite, pour $x > 0$,

$$S_1(x) - 1 = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

et donc $S_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{1} = e^{-x}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} S_1(x) = 1 \text{ et } S_1(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.}$$

2) *Etude du domaine de définition des fonctions* S_α $(\alpha > 0)$

a) Soit $x \leqslant 0$. Puisque $\alpha > 0$, pour tout $n \geqslant 1$, $n^\alpha \geqslant 1$ puis $-xn^\alpha \geqslant -x$ (car $-x \geqslant 0$) puis $e^{-xn^\alpha} \geqslant e^{-x} > 0$. En particulier, e^{-xn^α} ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série de terme général e^{-xn^α}, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement. Dans ce cas, $S_\alpha(x)$ n'existe pas.

b) Soit $x > 0$. Puisque $x > 0$ et $\alpha > 0$, $-xn^\alpha + 2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -xn^\alpha$ d'après un théorème de croissances comparées et en particulier, $-xn^\alpha + 2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$. On en déduit que

$$n^2 e^{-xn^\alpha} = e^{-xn^\alpha + 2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puis que $e^{-xn^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général e^{-xn^α}, $n \in \mathbb{N}$.

c) Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha > 0, \text{ le domaine de définition de la fonction } S_\alpha \text{ est }]0,+\infty[.}$$

3) *Premières propriétés des fonctions* S_α *($\alpha > 0$)*

a) Théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur I vers une certaine fonction f et que chaque fonction f_n est continue sur I. Alors, la fonction f est définie et continue sur I.

Soit $\alpha > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant \varepsilon$, posons $f_n(x) = e^{-xn^\alpha}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant \varepsilon$,

$$|f_n(x)| = e^{-xn^\alpha} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}.$$

La série numérique de terme général $e^{-\varepsilon n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, converge d'après la question 2)b) et donc la série de fonction de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Soit $\varepsilon > 0$. La série de fonction de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction S_α sur $[\varepsilon, +\infty[$. Puisque chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$, on en déduit que la fonction S_α est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$.

La fonction S_α est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } S_\alpha \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

b) Soit $\alpha > 0$. Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. Alors, $-y \leqslant -x$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-yn^\alpha} \leqslant e^{-xn^\alpha}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$S_\alpha(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-yn^\alpha} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = S_\alpha(x).$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{la fonction } S_\alpha \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[.}$$

Puisque la fonction S_α est monotone sur $]0, +\infty[$, la fonction S_α admet une limite élément de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ en 0 et en $+\infty$.

c) Théorème d'interversion des limites : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit a réel ou infini, adhérent à I.

On suppose que

- la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur I vers une certaine fonction f
- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$ a une limite ℓ_n dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) quand x tend vers a.

Alors,

- la série numérique de terme général ℓ_n, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- f a une limite ℓ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) quand x tend vers a,
- $\ell = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ ou encore plus explicitement

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Ici, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers la fonction S_α sur $[1, +\infty[$ et chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, a une limite réel ℓ_n quand x tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$. D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction S_α a une limite réelle en $+\infty$ et de plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1.}$$

d) On sait que la fonction S_α a une limite dans $[-\infty, +\infty]$ (et même $[0, +\infty]$ car la fonction S_α est positive) quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Posons $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} S_\alpha(x)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, $S_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1$.

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\ell \geqslant N + 1$. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = +\infty$. On a montré que

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} S_\alpha(x) = +\infty.}$$

Partie II. Etude de la fonction S_2

4) *Recherche d'un équivalent de* S_2 *en* 0

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $e^{-x(n+1)^2} \leqslant e^{-xt^2} \leqslant e^{-xn^2}$. En intégrant, on obtient

$$e^{-x(n+1)^2} = \int_n^{n+1} e^{-x(n+1)^2}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xn^2}\,dt = e^{-xn^2}.$$

b) Soit $x > 0$. En additionnant membre à membre, les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-xm^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$$

ou encore

$$S_2(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt \leqslant S_2(x).$$

Enfin, en posant $u = t\sqrt{x}$ de sorte que $u^2 = xt^2$ et aussi $t = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$ puis $dt = \dfrac{du}{\sqrt{x}}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x).}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $S_2(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = +\infty$, on retrouve le fait que

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} S_2(x) = +\infty.}$$

Plus précisément, pour tout $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1$ puis

$$1 \leqslant \frac{2\sqrt{x}S_2(x)}{\sqrt{\pi}} \leqslant 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{2\sqrt{x}S_2(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Ceci montre que

$$\boxed{S_2(x) \underset{x \to 0,\ x > 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

5) *Recherche d'un équivalent de* $S_2 - 1$ *en* $+\infty$

a) Soit $x > 0$. $S_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}$. Pour tout $n \geqslant 2$, $n^2 \geqslant n$ puis $e^{-xn^2} \leqslant e^{-xn}$. Donc,

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}.$$

b) Soit $x > 0$. Plus précisément,

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2} = S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{\left(e^{-x}\right)^2}{1 - e^{-x}}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}$ puis $0 \leqslant \frac{S_2(x) - 1 - e^{-x}}{e^{-x}} \leqslant \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{S_2(x) - 1 - e^{-x}}{e^{-x}} = 0$ et donc que $S_2(x) - 1 - e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$. Finalement,

$$\boxed{S_2(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + e^{-x} + o\left(e^{-x}\right).}$$

Ceci s'écrit encore $S_2(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{=} e^{-x} + o\left(e^{-x}\right)$ ou enfin

$$\boxed{S_2(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}.}$$

6) *Recherche d'une valeur approchée de* $S_2(x)$ *pour* $x > 0$

a) Soit $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant N + 1$. Pour tout $t \in [n - 1, n]$, $e^{-xt^2} \geqslant e^{-xn^2}$ puis

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} e^{-xt^2}\, dt = \int_{N}^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt.$$

b) Soient $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. En posant $u = xt^2$ et donc $t = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}$ puis $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{u}}$, on obtient

$$\int_{N}^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt = \int_{xN^2}^{+\infty} e^{-u}\, \frac{du}{2\sqrt{x}\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du.$$

Ainsi,

$$0 \leqslant S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \int_{N}^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{xN^2}}\, du &= \frac{1}{2Nx} \left[-e^{-u}\right]_{xN^2}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2Nx} \left(-\lim_{u \to +\infty} e^{-u} + e^{-xN^2}\right) = \frac{e^{-xN^2}}{2Nx}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^2} \leqslant \frac{e^{-xN^2}}{2Nx}.}$$

c) Algorithme en Python :

```
def va(x,epsilon):
N=0
S=0
while(exp(-x*N**2)/(2*N*x))>epsilon) :
    S+=exp(-x*N**2)
    N+=1
print(S)
```

d) La calculatrice fournit $\dfrac{e^{-4^2}}{2\times 4} = 1,4\ldots\times 10^{-8}$ et donc

$$0 \leqslant S_2(1) - \sum_{n=0}^{4} e^{-n^2} \leqslant \frac{e^{-4^2}}{2\times 4} = 1,4\ldots\times 10^{-8} < \frac{10^{-7}}{2}.$$

Une valeur approchée à $\dfrac{10^{-7}}{2}$ près (c'est-à-dire arrondie à la septième décimale la plus proche) de $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} e^{-n^2}$ est une valeur approchée de $S_2(1)$ à 10^{-7} près. On trouve

$$\boxed{S_2(1) = 1,386\,318\,6 \text{ à } 10^{-7} \text{ près.}}$$

Partie III. Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7) *Comparaison de deux intégrales*

a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Puisque la fonction $u\mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est positive sur $]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ (resp. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$) converge si et seulement si la fonction $u\mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ (resp. $[1,+\infty[$).

• La fonction $u\mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $]0,1]$ et positive. De plus, $e^{-u}u^{\alpha} \underset{u\to 0,\ u>0}{\sim} u^{\alpha-1}$. La fonction $u\mapsto u^{\alpha-1}$ est intégrable au voisinage de 0 à droite si et seulement si $\alpha-1>-1$ ou encore $\alpha>0$. La fonction $u\mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha>0$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ converge si et seulement si $\alpha>0$.

• La fonction $u\mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et positive. De plus, $u^2\times e^{-u}u^{\alpha} = e^{-u}u^{\alpha+2} \underset{u\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées, et donc $e^{-u}u^{\alpha} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. La fonction $u\mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ car $2>1$ et donc la fonction $u\mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ converge pour tout réel α.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ converge si et seulement si chacune des deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ convergent ce qui équivaut à $\alpha>0$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du \text{ converge si et seulement si } \alpha>0.}$$

b) Soit $\alpha>0$. Soient ε et A deux réels tels que $0<\varepsilon\leqslant A$. Les deux fonctions $u\mapsto -e^{-u}$ et $u\mapsto u^{\alpha}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A e^{-u}u^{\alpha}\,du &= \left[-e^{-u}u^{\alpha}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \left(-e^{-u}\right)\alpha u^{\alpha-1}\,du \\ &= -e^{-A}A^{\alpha} + e^{-\varepsilon}\varepsilon^{\alpha} + \alpha\int_\varepsilon^A e^{-u}u^{\alpha-1}\,du.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A}A^{\alpha}=0$ d'après un théorème de croissances comparées et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon}\varepsilon^{\alpha}=0$ car $\alpha>0$. Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha}\,du=\alpha\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du=\alpha\Gamma(\alpha).$$

$$\boxed{\forall\alpha>0,\ \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).}$$

$\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du=\left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty}=1$ puis, pour $n\geqslant 2$,

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\times(n-1)\ldots\times 1\times\Gamma(1)=n!.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1)=n!.}$$

c) Soient $\alpha>0$ et $x>0$. La fonction $t\mapsto xt^{\alpha}=u$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même, de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En posant $u=xt^{\alpha}$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du$, on obtient une intégrale convergente. Plus précisément, si $u=xt^{\alpha}$, alors $du=x\alpha t^{\alpha-1}\,dt$ puis

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du=\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}\left(xt^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,x\alpha t^{\alpha-1}\,dt=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}\,dt=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}I(\alpha).$$

En particulier, l'intégrale égale à $I(\alpha)$ est une intégrale convergente.

$$\boxed{\forall\alpha>0,\ \forall x>0,\ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}I(\alpha).}$$

8) *Recherche d'un équivalent de S_{α} en 0 ($\alpha>0$)*

a) Soient $\alpha>0$ et $x>0$.

$$\begin{aligned}S_{\alpha}(x)-\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}&=S_{\alpha}(x)-I(\alpha)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^{\alpha}}-\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-xn^{\alpha}}-\int_n^{n+1} e^{-xt^{\alpha}}\,dt\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1}\left(e^{-xn^{\alpha}}-e^{-xt^{\alpha}}\right)dt\end{aligned}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout réel t de $[n,n+1]$, $e^{-x(n+1)^{\alpha}}\leqslant e^{-xt^{\alpha}}\leqslant e^{-xn^{\alpha}}$ (par décroissance de la fonction $t\mapsto e^{-xt^{\alpha}}$ sur $[n,n+1]$) puis

$$0\leqslant e^{-xn^{\alpha}}-e^{-xt^{\alpha}}\leqslant e^{-xn^{\alpha}}-e^{-x(n+1)^{\alpha}}.$$

En intégrant, on obtient $0\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\left(e^{-xn^{\alpha}}-e^{-xt^{\alpha}}\right)dt\leqslant\int_n^{n+1}\left(e^{-xn^{\alpha}}-e^{-x(n+1)^{\alpha}}\right)dt=e^{-xn^{\alpha}}-e^{-x(n+1)^{\alpha}}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}0\leqslant S_{\alpha}(x)-\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}&\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-xn^{\alpha}}-e^{-x(n+1)^{\alpha}}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(e^{-xn^{\alpha}}-e^{-x(n+1)^{\alpha}}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\left(1-e^{-x(N+1)^{\alpha}}\right)\ \text{(somme télescopique)}\\&=1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\alpha>0,\ \forall x>0,\ 0\leqslant S_{\alpha}(x)-\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}\leqslant 1.}$$

b) Soient $\alpha > 0$ et $x > 0$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty$. D'après la question précédente, $S_\alpha(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} + O(1)$ et en particulier

$$S_\alpha(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

Ceci montre que

$$\boxed{\forall \alpha > 0,\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} S_\alpha(x) = +\infty \text{ et } S_\alpha(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{\sim} \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}.}$$

9) *Majoration d'une intégrale auxiliaire*

a) Soient $\alpha > 0$ et $x > 0$. On pose $u = xt^\alpha$ et donc $t = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{x^{\frac{1}{\alpha}}}$ puis $dt = \dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du$. On obtient

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-u} \times \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du$$

b) Soient $\alpha > 0$ et $x > 0$. Une intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du &= \left[-e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\left(-e^{-u}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du \\
&= -\lim_{u\to+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1} + e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du \\
&= e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du.
\end{aligned}$$

Pour $u \geqslant x$, on a $u^{-1} \leqslant x^{-1}$ puis $u^{\frac{1}{\alpha}-1}u^{-1} \leqslant u^{\frac{1}{\alpha}-1}x^{-1}$ et finalement, $e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2} \leqslant \dfrac{1}{x}e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}$. En intégrant ces inégalités, on obtient

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,du \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du\right)$ puis que $e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} \underset{x\to+\infty}{=} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du + o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du\right)$ ou enfin que

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) Mais alors,

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha x}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right).$$

10) *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)*

a) Soient $\alpha > 0$ et $x > 0$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ sur $[n-1, n]$, $n \geqslant 2$,

$$\int_{n-1}^{n} e^{-xt^\alpha}\,dt \geqslant \int_{n-1}^{n} e^{-xn^\alpha}\,dt = e^{-xn^\alpha}$$

puis en additionnant membre à membre ces inégalités,

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} e^{-xt^\alpha}\,dt \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}.$$

b) Soient $\alpha > 0$ et $x > 0$.

$$0 \leqslant S_\alpha(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\,dt.$$

D'après la question précédente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ et donc

$$S_{\alpha}(x) - 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right),$$

ou encore $S_{\alpha}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{=} e^{-x} + o\left(e^{-x}\right)$ et finalement,

$$\boxed{\forall\alpha > 0,\ S_{\alpha}(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.}$$

