Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Epreuve optionnelle

Partie I. Série entière matricielle et polynôme d'interpolation matriciel

1) *Polynôme minimal de la matrice* A

a) Si une famille de vecteurs d'un espace E est libre, son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de cet espace. Par contraposition, si le cardinal d'une famille de vecteurs est strictement supérieur à la dimension, alors cette famille est liée. Ici, $\dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) = n^2 < n^2+1 = \mathrm{card}\left(A^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n^2}$. Donc, la famille $\left(A^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n^2}$ est liée.

b) Si $m_d = 0$, les nombres $m_0, \ldots, m_{d-1}$, sont des réels non nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} m_i A^i = 0$ avec $d-1 < d$. Ceci contredit la définition de d et donc $m_d \neq 0$.

Soit $M = \dfrac{1}{m_d}\displaystyle\sum_{i=0}^{d} m_i X^i = X^d + \sum_{i=0}^{d-1}\frac{m_i}{m_d}X^i$. M est un polynôme unitaire de degré d tel que $M(A) = 0$. Ceci montre l'existence d'un polynôme unitaire M de degré d tel que $M(A) = 0$.
Soit P un polynôme unitaire de degré d tel que $P(A) = 0$. Alors, $M - P$ est un polynôme de degré strictement inférieur à d tel que $(M-P)(A) = 0$. Par définition de d, on ne peut avoir $M - P \neq 0$ et donc $M - P = 0$ ou encore $P = M$. Ceci montre l'unicité d'un polynôme unitaire M de degré d tel que $M(A) = 0$.

c) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k v_i = \lambda_i^k v_i$.

- Le résultat est vrai quand $k = 1$.
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $A^k v_i = \lambda_i^k v_i$. Alors,

$$A^{k+1}v_i = A \times A^k v_i = A \times \lambda_i^k v_i = \lambda_i^k A v_i = \lambda_i^{k+1} v_i.$$

On a montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k v_i = \lambda_i^k v_i$.

Mais alors, pour $i \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned} M(A)v_i &= \left(\mu_0 I_n + \sum_{k=1}^{d-1}\mu_k A^k + A^d\right)v_i = \mu_0 I_n v_i + \sum_{k=1}^{d-1}\mu_k A^k v_i + A^d v_i \\ &= \left(\mu_0\lambda_i + \sum_{k=1}^{d-1}\mu_k\lambda_i^k + \lambda_i^d\right)v_i = M\left(\lambda_i\right)v_i. \end{aligned}$$

Ainsi, $M\left(\lambda_i\right)v_i = M(A)v_i = 0_n v_i = 0$. Puisque le vecteur v_i est un vecteur propre de A, v_i n'est pas le vecteur nul et donc $M\left(\lambda_i\right) = 0$. Ainsi, les p valeurs propres deux à deux distinctes de A sont toutes racines du polynôme minimal M.

d) Puisque μ n'est pas valeur propre de la matrice A, on sait que la matrice $A - \mu I_n$ est inversible car par exemple, $\det\left(A - \mu I_n\right) = (-1)^n\chi_A(\mu) \neq 0$. Toute matrice inversible étant simplifiable pour $\times$, l'égalité $\left(A - \mu I_n\right)N(A) = 0_n = \left(A - \mu I_n\right)\times 0_n$ fournit $N(A) = 0_n$. Ainsi, N est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ unitaire de degré $d-1$ tel que $N(A) = 0$.

Posons $N = X^{d-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{d-2}\nu_k X^k$. Puisque A est une matrice à coefficients réels, on a

$$0_n = \mathrm{Re}(N(A)) = \mathrm{Re}\left(A^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2}\nu_k A^k\right) = A^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2}\mathrm{Re}\left(\nu_k\right)A^k = (\mathrm{Re}(N))(A).$$

Ainsi, $\mathrm{Re}(N)$ est un polynôme à coefficients réels de degré $d-1$ et annulateur de A. Ceci contredit la définition du polynôme minimal. Donc, un nombre complexe non valeur propre de A n'est pas racine de M.

2) *Polynôme d'interpolation aux points* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *de multiplicités* $r_1, r_2, \ldots, r_p$

a) Soient $(P, Q) \in \left(\mathbb{R}_{d-1}[X]\right)^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
&\varphi(aP+bQ)\\
&=\left(aP(\lambda_1)+bQ(\lambda_1),\ldots,aP^{(r_1-1)}(\lambda_1)+bQ^{(r_1-1)}(\lambda_1),\ldots,aP(\lambda_p)+bQ(\lambda_p),\ldots,aP^{(r_p-1)}(\lambda_p)+bQ^{(r_1-1)}(\lambda_p)\right)\\
&=a\left(P(\lambda_1),\ldots,P^{(r_1-1)}(\lambda_1),\ldots,P(\lambda_p),\ldots,P^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right)+b\left(Q(\lambda_1),\ldots,Q^{(r_1-1)}(\lambda_1),\ldots,Q(\lambda_p),\ldots,Q^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right)\\
&=a\varphi(P)+b\varphi(Q).
\end{aligned}
$$

Donc, $\varphi\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_{d-1}[X],\mathbb{R}^d\right)$.

Soit $P\in\mathbb{R}_{d-1}[X]$. Si P est dans $\text{Ker}(\varphi)$, alors $P(\lambda_1)=\ldots=P^{(r_1-1)}(\lambda_1)=\ldots=P(\lambda_p)=\ldots=P^{(r_p-1)}(\lambda_p)$ puis P admet λ_1 pour racine d'ordre de multiplicité au moins égal à r_1, ..., λ_p pour racine d'ordre de multiplicité au moins égal à r_p. P est donc divisible par le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{r_i}=M$. Puisque d'autre part, P est de degré strictement inférieur au degré de M, il ne reste que $P=0$.

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi)=\{0\}$ puis φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^d$. Puisque d'autre part, $\dim\left(\mathbb{R}_{d-1}[X]\right)=d=\dim\left(\mathbb{R}^d\right)<+\infty$, on en déduit que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^d$.

b) Soit $P\in\mathbb{R}^{d-1}[X]$.

$$
\begin{aligned}
\forall i\in[\![1,p]\!],\ P(\lambda_i)=f(\lambda_i),\ldots,P^{(r_i-1)}(\lambda_i)=f^{(r_i-1)}(\lambda_i)&\\
\Leftrightarrow \varphi(P)=\left(f(\lambda_1),\ldots,f^{(r_1-1)}(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_p),\ldots,f^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right)&\\
\Leftrightarrow P=\varphi^{-1}\left(\left(f(\lambda_1),\ldots,f^{(r_1-1)}(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_p),\ldots,f^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right)\right).&
\end{aligned}
$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'un polynôme L de degré inférieur ou égal à $d-1$, à coefficients réels, tel que $\forall i\in[\![1,p]\!],\ P(\lambda_i)=f(\lambda_i),P'(\lambda_i)=f'(\lambda_i),\ldots,P^{(r_i-1)}(\lambda_i)=f^{(r_i-1)}(\lambda_i)$.

c) Par définition, $L_{1,0}=\varphi^{-1}(e_1)$ et donc, $\varphi(L_{1,0})=e_1=(1,0,\ldots,0)$ puis $L_{1,1}=\varphi^{-1}(e_2)$ et donc, $\varphi(L_{1,1})=e_2=(0,1,0,\ldots,0)$ puis, pour $0\leqslant j\leqslant r_1-1$, $L_{1,j}=\varphi^{-1}(e_j)$ et donc $\varphi(L_{1,j})=e_{j+1}$. En particulier, $\varphi(L_{1,r_1-1})=e_{r_1-1+1}=e_{r_1}$.

Ensuite, $\varphi(L_{2,0})=e_{r_1+1}$, $\varphi(L_{2,1})=e_{r_1+2}$ et plus généralement, pour $0\leqslant j\leqslant r_2-1$, $\varphi(L_{2,j})=e_{r_1+j+1}$. En particulier, $\varphi(L_{2,r_2-1})=e_{r_1+r_2}$.

Plus généralement, en posant $r_0=0$ pour que la formule suivante soit valable y compris quand $i=1$,

$$\forall i\in[\![1,p]\!],\ \forall j\in[\![0,r_i-1]\!],\ \varphi(L_{i,j})=e_{r_0+r_1+\ldots+r_{i-1}+j+1}.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=0}^{r_i-1}f^{(j)}(\lambda_i)L_{i,j}\right)\right)&=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=0}^{r_i-1}f^{(j)}(\lambda_i)\varphi(L_{i,j})\right)\\
&=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=0}^{r_i-1}f^{(j)}(\lambda_i)e_{r_0+\ldots+r_{i-1}+j+1}\right)\\
&=\left(f(\lambda_1),\ldots,f^{(r_1-1)}(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_p),\ldots,f^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right)\\
&=\varphi(L)
\end{aligned}
$$

et donc, par injectivité de φ,

$$L=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=0}^{r_i-1}f^{(j)}(\lambda_i)L_{i,j}\right).$$

d) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,p]\!],\ &P(\lambda_i) = f(\lambda_i), \dots, P^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i)\\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ P(\lambda_i) = L(\lambda_i), \dots, P^{(r_i-1)}(\lambda_i) = L^{(r_i-1)}(\lambda_i)\\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ (P-L)(\lambda_i) = 0, \dots, (P-L)^{(r_i-1)}(\lambda_i) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ P-L \text{ admet } \lambda_i \text{ pour racine d'ordre au moins } r_i\\
&\Leftrightarrow P-L \text{ est divisible par } \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_i)^{r_i} = M\\
&\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X]/\ P = L + QM.
\end{aligned}$$

Les polynômes P solutions du problème posé, sont les polynômes de la forme $L + QM = L + Q\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_i)^{r_i}$ où Q est un élément quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

3) *Série entière en la matrice* A *et polynôme d'interpolation en la matrice* A

a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,p]\!]$. $f(\lambda_i) = Q_k(\lambda_i)M(\lambda_i) + L_k(\lambda_i) = L_k(\lambda_i)$.

Plus généralement, soit $j \in [\![0, r_i-1]\!]$. Le nombre λ_i est racine d'ordre r_i de M et donc d'ordre au moins égal à r_i de Q_kM. On en déduit que $f_k^{(j)}(\lambda_i) = (Q_kM)^{(j)}(\lambda_i) + L_k^{(j)}(\lambda_i) = L_k^{(j)}(\lambda_i)$. En résumé,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![0, r_i-1]\!],\ L_k^{(j)}(\lambda_i) = f_k^{(j)}(\lambda_i).$$

Puisque de plus $\deg(L_k) \leqslant d-1$, on en déduit que L_k est le polynôme d'interpolation de f_k aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $r_1, \dots, r_p$ et donc

$$L_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{r_i-1} f_k^{(j)}(\lambda_i)L_{i,j}.$$

b) Soient $i \in [\![1,p]\!]$ puis $j \in [\![0, r_i-1]\!]$. Pour $k \geqslant j$,

$$f_k^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{l=j}^{k} a_l \frac{l!}{(l-j)!}\lambda_i^{l-j}.$$

Quand k tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} f_k^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{l=j}^{+\infty} a_l \frac{l!}{(l-j)!}\lambda_i^{l-j} = f^{(j)}(\lambda_i).$$

On en déduit encore que

$$\lim_{k\to+\infty} L_k(A) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i)L_{i,j}(A) = L(A),$$

où L le polynôme d'interpolation de f aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $r_1, \dots, r_p$.

c) Soit $l \in \mathbb{N}^*$. $0 \leqslant \left\|a_lA^l\right\| = |a_l|\left\|A^l\right\| \leqslant |a_l|\,\|A\|^l$. Puisque la série entière de somme f est de rayon infini, la série numérique de terme général $|a_l|\,\|A\|^l$, $l \in \mathbb{N}$, converge. On en déduit que la série numérique de terme général $\left\|a_lA^l\right\|$, $l \in \mathbb{N}$, converge ou encore que la série matricielle de terme général a_lA^l, $l \in \mathbb{N}$, converge absolument (et donc converge).

d) Par définition de M, $M(A) = 0$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(A) = Q_k(A)M(A) + L_k(A) = L_k(A)$. Mais alors,

$$f(A) = \lim_{k\to+\infty} f_k(A) = \lim_{k\to+\infty} L_k(A) = L(A).$$

Partie II. Deux exemples d'applications

4) *Un premier exemple*

a) La matrice A est symétrique réelle et en particulier, la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b) La matrice $A-(a-b)I_3 = b\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (car $b \neq 0$). D'après le théorème du rang, $\text{Ker}\,(A-(a-b)I_3)$ est de dimension $3-1=2$. Ceci montre que le nombre $a-b$ est valeur propre de la matrice A. De plus, A étant diagonalisable, la valeur propre $a-b$ est d'ordre exactement 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}\,(A-(a-b)I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b\,(x+y+z)=0 \\ b\,(x+y+z)=0 \\ b\,(x+y+z)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x+y+z=0 \text{ (car } b\neq 0).$$

$E_{\lambda_1}(A) = \text{Ker}\,(A-(a-b)I_3)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$ (dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

Soit λ la dernière valeur propre de A : $a-b+a-b+\lambda = \text{Tr}(A) = 3a$ et donc $\lambda = a+2b$. Le nombre $\lambda_2 = a+2b$ est donc valeur propre simple de la matrice A. Puisque A est symétrique réelle, $E_{\lambda_2}(A) = \text{Ker}\,(A-(a+2b)I_3)$ est l'orthogonal (pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) du plan E_{λ_1} d'équation $1\times x + 1\times y + 1\times z = 0$. E_{λ_2} est donc la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou encore la droite : $x=y=z$.

c) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J.$$

puis,

$$\begin{aligned} A^2 &= (bJ+(a-b)I_3)^2 \\ &= b^2J^2 + 2b(a-b)J + (a-b)^2I_3 \text{ (car les matrices } bJ \text{ et } (a-b)I_3 \text{ commutent)} \\ &= 3b^2J + 2b(a-b)J + (a-b)^2I_3 = (3b+2(a-b))bJ + (a-b)^2I_3 \\ &= (2a+b)\,(A-(a-b)I_3) + (a-b)^2I_3 = (2a+b)A + (a-b)(-(2a+b)+(a-b))I_3 \\ &= (2a+b)A - (a-b)(a+2b)I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $P = X^2-(2a+b)X+(a-b)(a+2b)$ est annulateur de A, unitaire de degré 2. D'autre part, le polynôme minimal M de A est divisible par $(X-\lambda_1)\,(X-\lambda_2) = (X-(a-b))\,(X-(a+2b)) = X^2-(2a+b)X+(a-b)(a+2b)$ d'après la question 1)c) et est en particulier de degré supérieur ou égal à 2. Par définition et unicité du polynôme minimal, on en déduit que

$$M = X^2-(2a+b)X+(a-b)(a+2b) = (X-(a-b))\,(X-(a+2b))\,.$$

d) On sait que l'unique polynôme L de degré inférieur ou égal à 1 tel que $L(a-b) = f(a-b)$ et $L(a+2b) = f(a+2b)$ est

$$\begin{aligned} L &= f(a-b)\frac{X-(a+2b)}{(a-b)-(a+2b)} + f(a+2b)\frac{X-(a-b)}{(a+2b)-(a-b)} \\ &= \frac{1}{3b}[-f(a-b)(X-(a+2b)) + f(a+2b)(X-(a-b))] \\ &= \frac{1}{3b}[(f(a+2b)-f(a-b))X + (a+2b)f(a-b) - (a-b)f(a+2b)]. \end{aligned}$$

D'après la question 3)d) (ici, $p=2$, $\lambda_1 = a-b$, $\lambda_2 = a+2b$ et $r_1 = r_2 = 1$), on a alors

$$f(A) = L(A) = \frac{1}{3b}\left[(f(a+2b)-f(a-b))A + (a+2b)f(a-b) - (a-b)f(a+2b)I_3\right].$$

5) *Un second exemple*

a) Toujours d'après la question 3)d), $L_c(A) = \cos(A)$ et $L_s(A) = \sin(A)$.

b) Soit $i \in [\![1,p]\!]$.

$$L_c^2(\lambda_i) + L_s^2(\lambda_i) - 1 = \cos^2(\lambda_i) + \sin^2(\lambda_i) - 1 = 0.$$

Ensuite, soit $j \in [\![1, r_i - 1]\!]$. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\left(L_c^2 + L_s^2 - 1\right)^{(j)}(\lambda_i) &= \left(L_c^2\right)^{(j)}(\lambda_i) + \left(L_s^2\right)^{(j)}(\lambda_i) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} L_c^{(k)}(\lambda_i)\, L_c^{(j-k)}(\lambda_i) + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} L_s^{(k)}(\lambda_i)\, L_s^{(j-k)}(\lambda_i) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \cos^{(k)}(\lambda_i) \cos^{(j-k)}(\lambda_i) + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \sin^{(k)}(\lambda_i) \sin^{(j-k)}(\lambda_i) \\
&= \left(\cos^2\right)^{(j)}(\lambda_i) + \left(\sin^2\right)^{(j)}(\lambda_i) \\
&= \left(\cos^2 + \sin^2 - 1\right)^{(j)}(\lambda_i) = 0.
\end{aligned}$$

$L_c^2 + L_s^2 - 1$ est donc un polynôme vérifiant les conditions de la question 2)d) associé à la fonction $f = \cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$. D'autre part, un polynôme de degré au plus $d - 1 = r_1 + \ldots + r_p - 1$ vérifiant les conditions de la question 2)d) est le polynôme nul. Par unicité, $L = 0$. D'après la question 2)d), on sait alors qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$L_c^2 + L_s^2 - 1 = QM = Q \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}.$$

c) En évaluant en A, on obtient $L_c^2(A) + L_s^2(A) - I_n = Q(A)M(A) = 0_n$. Enfin, d'après la question a), $L_c(A) = \cos(A)$ et $L_s(A) = \sin(A)$ et finalement

$$\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_n.$$

