



Samedi 7 Avril 2018

EPREUVE : MATHÉMATIQUE

MP / PC / PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Dans ce problème, on désigne par f une fonction continue de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{C} , et on étudie en fonction de diverses hypothèses l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, si elle existe :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt.$$

Dans la partie III, on revient par d'autres méthodes sur le calcul de certaines de ces intégrales.

■ PARTIE I : Etude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1°) Etude d'un cas particulier

Dans cette question, on donne deux réels p et q et on suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{p t^2 + q}{t^2 + 1}.$$

a) Etablir, pour $x > 0$, qu'il existe des réels a_x et b_x , qu'on exprimera en fonction de x , tels que :

$$\forall t > 0, \quad \frac{f(xt) - f(t)}{t} = (p - q) \left(\frac{a_x t}{x^2 t^2 + 1} - \frac{b_x t}{t^2 + 1} \right).$$

b) En posant $u = t^2$, calculer pour tout réel $A \geq 0$ l'intégrale $\int_0^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt$ et en déduire $F(x)$.

c) Exprimer $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q , puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.

2°) Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$

On rappelle que, dans cette partie, la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^A \frac{f(u)}{u} du = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u} du.$$

b) En effectuant un changement de variables dans ces deux dernières intégrales, en déduire que :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(At)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

c) Etablir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

d) A l'aide du théorème de convergence dominée, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses, déterminer la limite de $\int_1^x \frac{f(At)}{t} dt$ lorsque A tend vers $+\infty$ et de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$ lorsque ε tend vers 0.

e) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

Comparer le résultat ainsi obtenu au résultat particulier obtenu à la question 1°.

3°) Application aux cas où $f(t) = \text{Arctan}(t)$ et $f(t) = e^{-t}$

a) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \text{Arctan}(t)$.

Que vaut l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(at) - \text{Arctan}(bt)}{t} dt$ où a et b sont strictement positifs?

b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$.

■ PARTIE II : Etude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge

Dans toute cette partie, on suppose que l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

4°) *Etude du cas particulier où l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge*

On suppose plus spécifiquement dans cette question que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- A l'aide d'un changement de variables, déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t} dt$.
- En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

5°) *Application au cas où $f(t) = \sin(t)$*

- Démontrer la relation suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

- Déterminer la limite de $\frac{1 - \cos(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0, puis vers $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ lorsque t tend vers 0, puis justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$, et enfin la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \sin(t)$.

6°) *Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge*

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- En raisonnant comme à la question 2°, démontrer l'égalité suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

- Déterminer la limite de $\int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du$ lorsque A tend vers $+\infty$.
- Déterminer comme à la question 2° la limite de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$ lorsque ε tend vers 0.
- En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

7°) *Application aux cas où $f(t) = e^{it}$ et $f(t) = \cos(t)$*

- Démontrer la relation suivante pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t} dt = \left[\frac{e^{it}}{it} \right]_1^A - i \int_1^A \frac{e^{it}}{t^2} dt.$$

- En déduire, en la justifiant soigneusement, la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$.
- En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{it}$, puis lorsque $f(t) = \cos(t)$.

■ PARTIE III : Une autre méthode de calcul lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$

Dans cette partie, on considère les deux intégrales suivantes pour $x > 0$:

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt \quad ; \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt.$$

On a démontré leur existence et déterminé leurs valeurs par une première méthode dans I et II.

On se propose de retrouver ces résultats *par une autre méthode, indépendante des précédentes*.

A cet effet, on introduit pour tout réel $x > 0$ et tout réel $R \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$U(x, R) = \int_0^R \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt \quad ; \quad V(x, R) = \int_0^R \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt.$$

8°) *Etude des fonctions U et V*

a) Déterminer les limites des fonctions $t \rightarrow \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ et $t \rightarrow \frac{e^{itx} - e^{it}}{t}$ quand t tend vers 0.

On prolonge alors ces fonctions en 0 par ces limites, de sorte qu'elles sont continues sur \mathbb{R}_+ .

b) En déduire, pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, l'existence des intégrales $U(x, R)$ et $V(x, R)$, puis préciser les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial R}(x, R)$ et $\frac{\partial V}{\partial R}(x, R)$.

9°) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$*

a) Justifier la convergence de l'intégrale $u(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que la fonction u est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ inclus dans \mathbb{R}_+^* .

Donner l'expression (sans intégrale) de $u'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) En remarquant la valeur de $u(1)$, en déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.

10°) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$*

Pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, on introduit l'intégrale suivante :

$$\varphi(x, R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR} e^{-it} dt.$$

a) Montrer que la fonction $R \rightarrow \varphi(x, R)$ est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .

Donner l'expression de sa dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R)$ sous forme intégrale pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$,

puis calculer cette dernière intégrale en primitivant la fonction sous le signe intégral.

b) Vérifier l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) = i \frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) - i \frac{\partial \varphi}{\partial R}(1, R).$$

En déduire l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$U(x, R) - V(x, R) = i \varphi(x, R) - i \varphi(1, R).$$

c) Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $\varphi(x, R)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

d) En déduire pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x) = v(x)$.

Retrouver ainsi les résultats obtenus dans les parties I et II lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$.