Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques

Partie I. Etude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

1) *Etude d'un cas particulier*

a) Soit $x > 0$. Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(xt)-f(t)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{px^2t^2+q}{x^2t^2+1}-\frac{pt^2+q}{t^2+1}\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{px^2t^2}{x^2t^2+1}-\frac{pt^2}{t^2+1}\right)+\frac{1}{t}\left(\frac{q}{x^2t^2+1}-\frac{q}{t^2+1}\right)\\ &= p\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right)+q\frac{(t^2+1)-(x^2t^2+1)}{t(t^2+1)(x^2t^2+1)} = p\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right)+q\frac{(1-x^2)t}{(t^2+1)(x^2t^2+1)}\\ &= p\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right)+q\left(-\frac{x^2t}{x^2t^2+1}+\frac{t}{t^2+1}\right)\\ &= (p-q)\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right).\end{aligned}$$

b) Soit $x > 0$. Soit $A \geqslant 0$. D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(xt)-f(t)}{t}$ est continue sur $]0, A]$ et se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(xt)-f(t)}{t} = \lim_{t\to 0}(p-q)\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right) = 0$). Donc, l'intégrale proposée existe puis

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{f(xt)-f(t)}{t} &= (p-q)\int_0^A\left(\frac{x^2}{x^2t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)t\,dt\\ &= (p-q)\int_0^{A^2}\left(\frac{x^2}{x^2u+1}-\frac{1}{u+1}\right)\frac{du}{2}\text{ (en posant } u = t^2)\\ &= \frac{1}{2}(p-q)\left[\ln\left(x^2u+1\right)-\ln(u+1)\right]_0^{A^2}\\ &= \frac{1}{2}(p-q)\ln\left(\frac{x^2A^2+1}{A^2+1}\right).\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale proposée et de plus $F(x) = \dfrac{1}{2}(p-q)\ln\left(x^2\right) = (p-q)\ln(x)$.

c) $L = p$ et $f(0) = q$ puis pour $x > 0$, $F(x) = (L - f(0))\ln(x)$.

2) *Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$*

a) Soit $x > 0$. Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(xt)-f(t)}{t}$ est continue sur le segment $[\varepsilon, A]$. Donc, l'intégrale proposée existe.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{f(xt)-f(t)}{t}\,dt &= \int_\varepsilon^A \frac{f(xt)}{t}\,dt - \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\,dt \text{ (les deux intégrales existent)}\\ &= \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u/x}\,du/x - \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\,dt \text{ (en posant } u = xt \text{ dans la première intégrale)}\\ &= \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,du \text{ (variable muette)}\\ &= \int_{\varepsilon x}^{\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,du + \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,du + \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,du\\ &= \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u}\,du.\end{aligned}$$

b) En posant $u = At$ (et donc $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dt}{t}$) dans la première intégrale et $u = \varepsilon t$ dans la deuxième, on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(xt) - f(t)}{t}\,dt = \int_{1}^{x} \frac{f(At)}{t}\,dt - \int_{1}^{x} \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt.$$

c) Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R}^+$, ayant une limite finie L en $+\infty$.
Il existe A tel que pour $t \geqslant A$, $|f(t) - L| \leqslant 1$. Pour $t \geqslant A$, on a $|f(t)| \leqslant |f(t) - L| + |L| \leqslant 1 + |L|$.
D'autre part, la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, A]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et en particulier, la fonction $|f|$ est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0, A]$ puis $M_1 = \mathrm{Max}\{M, 1 + |L|\}$. Pour tout t de $[0, +\infty[$, on a alors $|f(t)| \leqslant M_1$. On a montré que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

d) Soit $x > 0$. On pose $I = [1, x]$ si $x \geqslant 1$ et $[x, 1]$ si $0 < x \leqslant 1$. Pour $(A, t) \in]0, +\infty[\times I$, posons $g(A, t) = \dfrac{f(At)}{t}$ de sorte que $\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{f(At)}{t}\,dt = \int_{1}^{x} g(A, t)\,dt$.

- Pour tout réel $A \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g(A, t)$ est continue par morceaux sur le segment I.
- Pour tout réel $t \in I$, la fonction $A \mapsto g(A, t)$ a une limite $\ell(t)$ quand A tend vers $+\infty$ à savoir $\ell(t) = \dfrac{L}{t}$. De plus, la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $(A, t) \in]0, +\infty[\times I$, $|g(A, t)| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{t} = \varphi(t)$ où de plus φ est continue par morceaux et intégrable (car continue) sur le segment I.

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{f(At)}{t}\,dt$ a une limite quand A tend vers $+\infty$ et de plus, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{f(At)}{t}\,dt = \int_{1}^{x} \lim_{A \to +\infty} \frac{f(At)}{t}\,dt = \int_{1}^{x} \frac{L}{t}\,dt = L\ln(x)$.

De même, (par continuité de f en 0), $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1}^{x} \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt = \int_{1}^{x} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt = \int_{1}^{x} \frac{f(0)}{t}\,dt = f(0)\ln(x)$.

e) On en déduit que l'intégrale égale à $F(x)$ converge en 0 et en $+\infty$ et que

$$F(x) = \lim_{A \to +\infty,\ \varepsilon \to 0} \int_{1}^{x} \frac{f(xt) - f(t)}{t}\,dt = \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{f(At)}{t}\,dt - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1}^{x} \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt = (L - f(0))\mathrm{Ln}(x),$$

ce qui est en accord avec le résultat de la question 1).

3) *Application aux cas où* $f(t) = \mathrm{Arctan}(t)$ *et* $f(t) = e^{-t}$

a) La fonction $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et a une limite finie en $+\infty$ à savoir $L = \dfrac{\pi}{2}$. En tenant compte de $f(0) = 0$, la question précédente permet d'affirmer que

$$\forall x > 0,\ \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt) - \mathrm{Arctan}(t)}{t}\,dt = \frac{\pi\ln(x)}{2}.$$

Soient alors a et b deux réels strictement positifs. En posant $u = bt$, on obtient

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(at) - \mathrm{Arctan}(bt)}{t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{a}{b}u\right) - \mathrm{Arctan}(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

b) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et a une limite finie en $+\infty$ à savoir $L = 0$. En tenant compte de $f(0) = 1$, la question précédente permet d'affirmer que

$$\forall x > 0,\ \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t}\,dt = -\ln(x).$$

Partie II. Etude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge

4) *Etude du cas particulier où l'intégrale impropre* $J = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ *converge*

a) Soit $x > 0$. En posant $t = ux$ (et donc $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dt}{t}$), on obtient la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ux)}{u}\,du$ et de plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ux)}{u}\,du = J$.

b) Soit $x > 0$. Puisque toutes les intégrales ci-dessous convergent,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = J - J = 0.$$

5) *Application au cas où* $f(t) = \sin(t)$

a) Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

b) $\dfrac{1-\cos t}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^2/2}{t} = \dfrac{t}{2}$. Donc, $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$.
Pour tout $t > 0$, $\left|\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{2}{t}$ et donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$.

c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
$\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$. Donc, $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 et on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ converge en 0.
$\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} \dfrac{O(1)}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et en particulier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ converge en $+\infty$.
Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente.
D'après la question 5)a), pour tous réels ε et A tels que $0 < \varepsilon < A$,

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{1-\cos A}{A} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt.$$

D'après la question b) et le début de cette question, le second membre de l'égalité ci-dessus a une limite réelle quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.

d) D'après la question 4),

$$\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt) - \sin(t)}{t}\,dt = 0.$$

6) *Etude de* $F(x)$ *pour* $x > 0$ *lorsque l'intégrale impropre* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ *converge*

a) Soit $x > 0$. Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(xt) - f(t)}{t}$ est continue sur le segment $[\varepsilon, A]$. Donc, l'intégrale proposée existe. Comme dans la question 2)

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{f(xt)-f(t)}{t}\,dt &= \int_\varepsilon^A \frac{f(xt)}{t}\,dt - \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u/x}\,du/x - \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\,dt \\ &= \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,du = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u}\,du \\ &= \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

b) Soit $x > 0$. Pour $A > 0$,

$$\int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_A^1 \frac{f(u)}{u}\,du + \int_1^{Ax} \frac{f(u)}{u}\,du$$

Cette dernière expression tend vers $-I + I = 0$ quand A tend vers $+\infty$.

c) Soit $x > 0$. La fonction f est continue sur le segment $[0, x]$ et en particulier est bornée sur ce segment. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et tout $t \in [1, x]$, $\varepsilon t \in [0, x]$. Donc, pout tout $(\varepsilon, t) \in]0, 1] \times [1, x]$, $\dfrac{|f(\varepsilon t)|}{t} \leqslant \dfrac{\|f\|_{\infty,\ [0,x]}}{t} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[1, x]$. Comme à la question 2), le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt = \int_1^x \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon t)}{t}\,dt = \int_1^x \frac{f(0)}{t}\,dt = f(0)\ln(x).$$

d) On en déduit que pour $x > 0$, $F(x)$ existe et

$$F(x) = 0 - f(0)\ln(x) = -f(0)\ln(x).$$

7) *Application aux cas où* $f(t) = e^{it}$ *et* $f(t) = \cos(t)$

a) Soit $A > 1$. Une intégration par parties licite fournit

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_1^A + \frac{1}{i}\int_1^A \frac{e^{it}}{t^2}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_1^A - i\int_1^A \frac{e^{it}}{t^2}\,dt.$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et est dominée en $+\infty$ par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. En particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente. On en déduit que la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_1^A \frac{e^{it}}{t^2}\,dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand A tend vers $+\infty$.

D'autre part, pour $A > 1$, $\left|\dfrac{e^{iA}}{iA}\right| = \dfrac{1}{A}$ et donc la fonction $A \mapsto \dfrac{e^{iA}}{iA}$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand A tend vers $+\infty$ à savoir 0.

Puisque $\displaystyle\int_1^A \frac{e^{it}}{t}\,dt = \frac{e^{iA}}{iA} - \frac{e^{i}}{i} - i\int_1^A \frac{e^{it}}{t^2}\,dt$, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_1^A \frac{e^{it}}{t}\,dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand A tend vers $+\infty$ ou encore l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt$ est une intégrale convergente.

c) Si pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = e^{it}$, d'après la question précédente et la question 6)d),

$$\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - e^{it}}{t}\,dt = f(0)\ln(x) = -\ln(x).$$

On en déduit encore la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) - \cos(t)}{t}\,dt$ et

$$\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) - \cos(t)}{t}\,dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - e^{it}}{t}\,dt\right) = -\ln(x).$$

Partie III. Une autre méthode calcul lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$

8) *Etude des fonctions* U *et* V

a) Soit $x > 0$. $\dfrac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} \underset{t \to 0}{=} \dfrac{(1 - xt + o(t)) - (1 - t + o(t))}{t} = (1 - x) + o(1)$. Donc, $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} = 1 - x$.
$\dfrac{e^{itx} - e^{it}}{t} \underset{t \to 0}{=} \dfrac{(1 + ixt + o(t)) - (1 + it + o(t))}{t} = i(x - 1) + o(1)$. Donc, $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} = i(x - 1)$.

b) Soit $x > 0$. Pour $t \in [0, +\infty[$, posons $g(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} \text{ si } t > 0 \\ 1 - x \text{ si } t = 0 \end{cases}$ et $h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it} - e^{it}}{t} \text{ si } t > 0 \\ i(x - 1) \text{ si } t = 0 \end{cases}$. Les fonction g et h sont continues sur $[0, +\infty[$. Donc les fonctions $R \mapsto U(x, R) = \displaystyle\int_0^R \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^R g(t)\,dt$ et $R \mapsto$

$V(x,R) = \displaystyle\int_0^R \frac{e^{ixt} - e^{it}}{t}\ dt = \int_0^R h(t)\ dt$ sont définies et dérivables sur $[0,+\infty[$ de dérivées respectives $R \mapsto g(R) = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-xR} - e^{-R}}{R} \text{ si } R > 0 \\ 1 - x \text{ si } R = 0\end{array}\right.$ et $R \mapsto h(R) = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{ixR} - e^{iR}}{R} \text{ si } R > 0 \\ i(x-1) \text{ si } R = 0\end{array}\right.$. Donc,

$$\forall (x,R) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial U}{\partial R}(x,R) = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-xR} - e^{-R}}{R} \text{ si } R > 0 \\ 1 - x \text{ si } R = 0\end{array}\right. \quad \text{et}\quad \frac{\partial V}{\partial R}(x,R) = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{ixR} - e^{iR}}{R} \text{ si } R > 0 \\ i(x-1) \text{ si } R = 0\end{array}\right. .$$

9) *Calcul de l'intégrale* $u(x)$ *pour* $x > 0$

a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 d'après la question 8)a) et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis que $u(x)$ existe.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Pour $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, posons $G(x,t) = \dfrac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ de sorte que pour tout $x \in [a,b]$, $u(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G(x,t)\ dt$.

• Pour tout réel $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto G(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 9)a).

• La fonction G admet sur $[a,b]\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx}.$$

De plus,

- Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.
- Pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-tx} \leqslant e^{-ta} = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, u est de classe C^1 sur $[a,b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme.

Ceci étant vrai pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$, la fonction u est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ u'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\right)\ dt = \int_0^{+\infty} -e^{-tx}\ dt = \left[\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x}.$$

c) Mais alors pour $x > 0$,

$$u(x) = u(1) + \int_1^x u'(t)\ dt = 0 + \int_1^x -\frac{1}{t}\ dt = -\ln(x).$$

10) *Calcul de l'intégrale* $v(x)$ *pour* $x > 0$

a) Soit $x > 0$. Pour $(R,t) \in [0,+\infty[\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $H(R,t) = e^{-xRe^{-it}}$ de sorte que pour tout $R \in [0,a]$, $\varphi(x,R) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} H(R,t)\ dt$.

• Pour tout réel $R \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto H(R,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

• La fonction H admet sur $[0,+\infty[\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable R définie par :

$$\forall (R,t) \in [0,+\infty[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{\partial H}{\partial R}(R,t) = -xe^{-it}e^{-xRe^{-it}}.$$

De plus,

- Pour tout $R \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial R}(R, t)$ est continue par morceaux sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial R}(R, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $(R, t) \in [0, +\infty[\times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left|\dfrac{\partial H}{\partial R}(R, t)\right| = xe^{-xR\cos(t)} \leqslant xe^0 = x = \psi(t)$. De plus, la fonction ψ est continue par morceaux et intégrable sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $R \mapsto \varphi(x, R)$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme ou encore φ admet sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à R et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it}e^{-xRe^{-it}}\ dt = \left[\frac{e^{-xRe^{-it}}}{-iR}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{-xR} - e^{ixR}}{iR}.$$

b) Pour $x > 0$ et $R \geqslant 0$, d'après la question 8)a) et d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) &= \frac{e^{-xR} - e^{-R}}{R} - \frac{e^{ixR} - e^{iR}}{R}\\ &= i\left(\frac{e^{-xR} - e^{ixR}}{iR} - \frac{e^{-R} - e^{iR}}{iR}\right) = i\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) - i\frac{\partial \varphi}{\partial R}(1, R).\end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité, on obtient pour $(x, R) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$,

$$U(x, R) - V(x, R) = i\varphi(x, R) - i\varphi(1, R) + C(x)$$

où C est une certaine fonction définie sur $]0, +\infty[$. Pour $R = 0$ et $x > 0$, on obtient $C(x) = i\varphi(1, 0) - i\varphi(x, 0) = i\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt\right) = 0$ et donc

$$\forall x > 0,\ \forall R \geqslant 0,\ U(x, R) - V(x, R) = i\varphi(x, R) - i\varphi(1, R).$$

c) Soit $x > 0$.

1 ère solution. Pour tout $R \geqslant 0$,

$$|\varphi(x, R)| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{-xRe^{-it}}\right|\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\cos t}\ dt.$$

Soit $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $R \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\cos t}\ dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} e^{-xR\cos t}\ dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\cos t}\ dt\\ &\leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-xR\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{\varepsilon}{2} \times 1\\ &\leqslant \frac{\pi}{2}e^{-xR\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ et donc $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \frac{\pi}{2}e^{-xR\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 0$. Par suite, il existe $R_0 > 0$ tel que pour $R \geqslant R_0$, $\dfrac{\pi}{2}e^{-xR\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $R \geqslant R_0$, on a

$$|\varphi(x, R)| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\cos t}\ dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R_0 > 0/\ \forall R \in \mathbb{R}^+,\ (R \geqslant R_0 \Rightarrow |\varphi(x, R)| \leqslant \varepsilon)$. Donc, $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \varphi(x, R) = 0$.

2 ème solution. En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\cos t}\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-xR\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\ (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\sin t}\ dt$.

Maintenant la fonction $t \mapsto \sin t$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car sa dérivée seconde, à savoir $-\sin$, est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Son graphe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est au-dessus de la corde joignant les points $(0, 0)$ et $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ou encore, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$. Par suite, pour $R \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\sin t}\, dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\frac{2}{\pi}t}\, dt = \frac{\pi}{2xR}\left(1 - e^{-xR}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{R \to +\infty} \frac{\pi}{2xR}\left(1 - e^{-xR}\right) = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR\sin t}\, dt = 0$ et encore une fois, $\lim\limits_{R \to +\infty} \varphi(x, R) = 0$.

d) Soit $x > 0$. D'après b), pour tout $R \geqslant 0$, $U(x, R) - V(x, R) = i\varphi(x, R) - i\varphi(1, R)$. Quand R tend vers $+\infty$, on obtient la convergence de l'intégrale égale à $v(x)$ et l'égalité $u(x) - v(x) = 0$. D'après la question 9)c), on a alors pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - e^{itx}}{t}\, dt = -\ln(x),$$

et on retrouve ainsi les résultats de I.3)b) et II.7)c).

