CONCOURS CPGE
EPITA / IPSA / ESME
1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 7 Avril 2018

OPTION : MATHEMATIQUE

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Dans la partie I, on étudie une famille sommable et une série associées à la fonction de Möbius. Dans la partie II, largement indépendante de I, on exploite ces résultats pour obtenir la probabilité pour qu'un entier $d \geq 1$ soit sans facteur carré, c'est-à-dire non divisible par un entier m^2 où $m \geq 2$.

■ PARTIE I : La fonction arithmétique de Möbius

Etant donné un entier $n \geq 2$, on introduit sa factorisation en nombres premiers $n = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2}\, \dots\, p_q^{r_q}$ où $p_1, p_2, \dots, p_q$ sont premiers et distincts et $r_1, r_2, \dots, r_q$ des entiers supérieurs ou égaux à 1.

On définit la *fonction de Möbius* $\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ par $\mu(1) = 1$, puis, si $n = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2}\, \dots\, p_q^{r_q} \geq 2$, par :

- si l'un des entiers $r_1, r_2, \dots, r_q$ est supérieur ou égal à 2, alors $\mu(n) = \mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2}\, \dots\, p_q^{r_q}\right) = 0$.
- si $r_1 = r_2 = \dots = r_q = 1$, alors $\mu(n) = \mu\left(p_1\, p_2\, \dots\, p_q\right) = (-1)^q$.

On vérifiera donc que : $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$, etc.

1°) *Une propriété de la fonction de Möbius*

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des entiers naturels qui divisent n.

a) Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_1$, puis les ensembles $\mathcal{D}_n$ pour $2 \leq n \leq 10$.
En déduire la somme $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ pour $n = 1$, puis pour $2 \leq n \leq 10$. Que peut-on conjecturer?

b) En étudiant la forme des diviseurs d de $n = p_1^{r_1}\, \dots\, p_q^{r_q}$, établir que les seuls diviseurs d de n pour lesquels on a $\mu(d) \neq 0$ sont $d = 1$ et les entiers d du type $d = p_{i_1}\, p_{i_2} \dots p_{i_k}$ où $1 \leq k \leq q$ et où $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ est une partie à k éléments de $[\![1, q]\!]$, puis en déduire que :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = 1 + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k.$$

c) En déduire la valeur numérique de la somme $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ pour $n \geq 2$.

2°) *La famille sommable* $\left(\mu(d) \big/ \left(m^2\, d^2\right)\right)$ *pour* $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

a) Justifier la convergence absolue de la série de terme général $\mu(d) \big/ d^2$ où $d \geq 1$.

b) Justifier la sommabilité de la famille $\left(\mu(d) \big/ \left(m^2\, d^2\right)\right)$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

c) On calcule de deux façons la somme de la famille $\left(\mu(d) \big/ \left(m^2\, d^2\right)\right)$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- Etablir l'égalité suivante (on rappelle que la somme de la série $\sum \frac{1}{m^2}$ est égale à $\frac{\pi^2}{6}$) :

$$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2\, d^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

- En exploitant la partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ formée par les parties $P_n = \{(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \;/\; m\, d = n\}$ où $n \geq 1$, établir les égalités suivantes :

$$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2\, d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) \right) = 1.$$

d) En déduire la somme de la série de terme général $\mu(d) \big/ d^2$ pour $d \geq 1$.

■ PARTIE II : Les entiers naturels sans facteur carré

Etant donné un entier $n \geq 2$, on note désormais $\{p_1, p_2, \ldots, p_q\}$ l'ensemble des nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à n. Il en résulte que tout entier d appartenant à $[\![1, n]\!]$ peut donc s'écrire $d = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_q^{r_q}$ avec des exposants $r_1, r_2, \ldots, r_q$ éventuellement nuls.

3°) *Une formule préliminaire*

Dans toute la suite, on désigne comme d'habitude par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x.

a) Etablir l'égalité des deux sommes suivantes, en montrant que tous les termes de la 1ère somme figurent dans la 2ème et que les termes de la 2ème somme ne figurant pas dans la 1ère sont nuls :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{(r_1, r_2, \ldots, r_q) \in \mathbb{N}^q} \mu\left(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_q^{r_q}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \ldots p_q^{2r_q}} \right\rfloor.$$

b) En examinant quels sont les termes pour lesquels $\mu\left(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_q^{r_q}\right) \neq 0$, en déduire que :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \left(\sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset [\![1, q]\!]} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2 p_{i_2}^2 \ldots p_{i_k}^2} \right\rfloor \right)$$

où la dernière sommation est faite sur toutes les parties $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ à k éléments de $[\![1, q]\!]$.

4°) *Nombre des entiers sans facteur carré appartenant à* $[\![1, n]\!]$

On dit qu'*un entier $d \in \mathbb{N}^*$ a un facteur carré* s'il existe $m \geq 2$ tel que m^2 divise d, et on désigne dans la suite par C_n l'ensemble des entiers d appartenant à $[\![1, n]\!]$ et ayant un facteur carré.

a) Montrer que $d = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_q^{r_q}$ a un facteur carré si et seulement si : $\exists\, i \in [\![1, q]\!],\ r_i \geq 2$.

b) En déduire que $C_n = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_q$ où $P_i = \left\{d \in [\![1, n]\!] \;/\; p_i^2 \text{ divise } d\right\}$ pour $1 \leq i \leq q$.

c) Montrer que les entiers appartenant à P_i sont ceux s'écrivant $k\, p_i^2$ avec $1 \leq k \leq n / p_i^2$.

En déduire le cardinal $|P_i|$ de l'ensemble P_i pour $1 \leq i \leq q$.

Etablir de même que $\left|P_i \cap P_j\right| = \left\lfloor \frac{n}{p_i^2 p_j^2} \right\rfloor$ pour $1 \leq i < j \leq q$.

Que vaut $\left|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k}\right|$ où $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ désigne une partie à k éléments de $[\![1, q]\!]$?

d) On admet la formule du crible, qui donne le cardinal d'une réunion $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_q$:

$$\left| P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_q \right| = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset [\![1, q]\!]} \left| P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k} \right| \right).$$

En déduire que le cardinal $|\overline{C_n}|$ du complémentaire $\overline{C_n}$ de C_n dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est égal à :

$$|\overline{C_n}| = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor.$$

5°) *Probabilité p_n pour qu'un entier de* $[\![1, n]\!]$ *soit sans facteur carré*

a) On munit l'ensemble $[\![1, n]\!]$ de l'équiprobabilité. Quelle est la probabilité p_n de la partie $\overline{C_n}$?

b) En évaluant la partie entière $\lfloor n / d^2 \rfloor$ pour tout entier $d > \sqrt{n}$, établir les égalités :

$$\left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| = \left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

c) En exploitant le résultat final de la partie I, en déduire la limite de la suite (p_n).