Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

Partie I. La fonction arithmétique de Möbius

1) *Une propriété de la fonction de* Möbius

a) $\mathscr{D}_1 = \{1\}$. $\mathscr{D}_2 = \{1,2\}$. $\mathscr{D}_3 = \{1,3\}$. $\mathscr{D}_4 = \{1,2,4\}$. $\mathscr{D}_5 = \{1,5\}$. $\mathscr{D}_6 = \{1,2,3,6\}$. $\mathscr{D}_7 = \{1,7\}$. $\mathscr{D}_8 = \{1,2,4,8\}$. $\mathscr{D}_9 = \{1,3,9\}$. $\mathscr{D}_{10} = \{1,2,5,10\}$.

- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_1} \mu(d) = \mu(1) = 1.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_2} \mu(d) = \mu(1)+\mu(2) = 1-1 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_3} \mu(d) = \mu(1)+\mu(3) = 1-1 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_4} \mu(d) = \mu(1)+\mu(2)+\mu(4) = 1-1+0 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_5} \mu(d) = \mu(1)+\mu(5) = 1-1 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_6} \mu(d) = \mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(6) = 1-1-1+1 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_7} \mu(d) = \mu(1)+\mu(7) = 1-1 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_8} \mu(d) = \mu(1)+\mu(2)+\mu(4)+\mu(8) = 1-1+0+0 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_9} \mu(d) = \mu(1)+\mu(3)+\mu(9) = 1-1+0.$
- $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_{10}} \mu(d) = \mu(1)+\mu(2)+\mu(5)+\mu(10) = 1-1-1+1 = 0.$

Il semble que $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{d\in\mathscr{D}_n} \mu(d) = 0$.

b) Soit $n \geqslant 2$. Notons $n = p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}$ la décomposition primaire de n.
On sait que $\mathscr{D}_n = \left\{p_1^{s_1}\dots p_q^{s_q},\ (s_1,\dots,s_q) \in [\![0,r_1]\!]\times\dots\times[\![0,r_q]\!]\right\}$.
Les diviseurs d de n pour lesquels $\mu(d) \neq 0$ sont $d = 1$ et les entiers d de la forme $p_{i_1}\dots p_{i_k}$ où $1 \leqslant k \leqslant q$ et $(i_1,\dots,i_k) \in \mathscr{P}_k([\![1,q]\!])$ (l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,q]\!]$). On sait que $\mathrm{card}\left(\mathscr{P}_k([\![1,q]\!])\right) = \dbinom{q}{k}$ et donc

$$\sum_{d\in\mathscr{D}_n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathscr{P}_k([\![1,q]\!])} \mu\left(p_{i_1}\dots p_{i_k}\right)\right)$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k.$$

c) Soit $n \geqslant 2$. Donc, $q \geqslant 1$ puis d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{d\in\mathscr{D}_n} \mu(d) = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k = (1-1)^q = 0.$$

2) *La famille sommable* $\left(\mu(d)/\left(m^2d^2\right)\right)$ *pour* $(m,n) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

a) Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\mu(d) \in \{1, 0, -1\}$ et donc $|\mu(d)| \leqslant 1$ puis $\left|\dfrac{\mu(d)}{d^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{d^2}$. On sait que la série de terme général $\dfrac{1}{d^2}$, $d \geqslant 1$, converge et donc la série de terme général $\dfrac{\mu(d)}{d^2}$, $d \geqslant 1$, converge.

b) Pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{m,d} = \dfrac{\mu(d)}{m^2 d^2}$.

• Pour chaque $d \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $\dfrac{\mu(d)}{d^2 m^2}$, $m \geqslant 1$, converge absolument et de plus, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\frac{\mu(d)}{d^2 m^2}\right| = \frac{|\mu(d)|}{d^2} \times \frac{\pi^2}{6}$.

• D'après la question précédente, la série de terme général $\dfrac{|\mu(d)|}{d^2} \times \dfrac{\pi^2}{6}$ converge.

Ceci montre que la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{d^2 m^2}\right)_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

c) Puisque la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{d^2 m^2}\right)_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable,

$$\begin{aligned}\sum_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{d^2 m^2} &= \sum_{d=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2 m^2}\right) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.\end{aligned}$$

Mais d'autre part, puisque la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{d^2 m^2}\right)_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable,

$$\sum_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(m,d)\in P_n} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{(m,d)\in P_n} \mu(d)\right)$$

Maintenant, l'application $d \mapsto \left(\dfrac{n}{d}, d\right)$ est une bijection de $\mathscr{D}_n$ sur P_n et donc,

$$\sum_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{d\in\mathscr{D}_n} \mu(d)\right) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{d\in\mathscr{D}_n} \mu(d)\right) = 1.$$

d) D'après la question précédente, toujours par sommabilité de la famille $\left(\dfrac{\mu(d)}{d^2 m^2}\right)_{(m,d)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, $\dfrac{\pi^2}{6}\displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} = 1$ d'après la question 1)c) et donc

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Partie II. Les entiers naturels sans facteur carré

3) *Une formule préliminaire*

a) Soit $n \geqslant 2$. Si $p_1^{2r_1} \dots p_q^{2r_q} > n$, alors $\left[\dfrac{n}{p_1^{2r_1} \dots p_q^{2r_q}}\right] = 0$. Donc,

$$\sum_{(r_1,\dots,r_q)\in\mathbb{N}^q} \mu\left(p_1^{r_1} \dots p_q^{r_q}\right)\left[\frac{n}{p_1^{2r_1} \dots p_q^{2r_q}}\right] = \sum_{\substack{(r_1,\dots,r_q)\in\mathbb{N}^q \\ p_1^{2r_1}\dots p_q^{2r_q} \leqslant n}} \mu\left(p_1^{r_1} \dots p_q^{r_q}\right)\left[\frac{n}{p_1^{2r_1} \dots p_q^{2r_q}}\right].$$

Maintenant, tout entier d tel que $1 \leqslant d \leqslant \sqrt{n}$ s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme $p_1^{r_1} \dots p_q^{r_q}$ où $(r_1, \dots, r_q) \in \mathbb{N}^q$ et $p_1^{2r_1} \dots p_q^{2r_q} \leqslant n$ d'après le théorème fondamental de l'arithmétique. Donc,

$$\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left[\frac{n}{d^2}\right]=\sum_{1\leqslant d\leqslant\sqrt{n}}\mu(d)\left[\frac{n}{d^2}\right]$$
$$=\sum_{\substack{(r_1,\dots,r_q)\in\mathbb{N}^q\\ p_1^{2r_1}\dots p_q^{2r_q}\leqslant n}}\mu\left(p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}\right)\left[\frac{n}{p_1^{2r_1}\dots p_q^{2r_q}}\right]=\sum_{(r_1,\dots,r_q)\in\mathbb{N}^q}\mu\left(p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}\right)\left[\frac{n}{p_1^{2r_1}\dots p_q^{2r_q}}\right].$$

b) Dans la somme précédente, si l'un des r_i est supérieur ou égal à 2, alors $\mu\left(p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}\right)=0$. Il ne reste donc que

$$\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left[\frac{n}{d^2}\right]=\sum_{(r_1,\dots,r_q)\in\{0,1\}^q}\mu\left(p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}\right)\left[\frac{n}{p_1^{2r_1}\dots p_q^{2r_q}}\right]$$
$$=[n]+\sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathscr{P}_k([\![1,q]\!])}\mu\left(p_{i_1}\dots p_{i_k}\right)\left[\frac{n}{p_{i_1}^2\dots p_{i_k}^2}\right]\right)$$
$$=[n]+\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathscr{P}_k([\![1,q]\!])}\left[\frac{n}{p_{i_1}^2\dots p_{i_k}^2}\right]\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\subset[\![1,q]\!]}\left[\frac{n}{p_{i_1}^2\dots p_{i_k}^2}\right]\right).$$

4) *Nombre des entiers sans facteur carré appartenant à* $[\![1,n]\!]$

a) Soit $d=p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}\in C_n$. Il existe $m\geqslant 2$ tel que m^2 divise d. Un facteur premier p de m divise m^2 et donc d. Par suite, p est l'un des p_i, $1\leqslant i\leqslant q$. On peut poser $m=p_im'$ où $m\in\mathbb{N}^*$. p_i^2 divise $p_i^2m'^2=m^2$ et donc p_i^2 divise $d=p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}$. p_i^2 est premier avec chacun des $p_j^{r_j}$, $j\neq i$. D'après le théorème de Gauss, p_i^2 divise $p_i^{r_i}$ ou encore $r_i\geqslant 2$.

Réciproquement, s'il existe i tel que $r_i\geqslant 2$, alors $d=p_i^2\left(p_i^{r_i-2}\prod_{j\neq i}p_j^{r_j}\right)$. Par suite, p_i^2 divise d avec $p_i\geqslant 2$ et donc $d\in C_n$.

b) Soit $d=p_1^{r_1}\dots p_q^{r_q}\in[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}d\in C_n&\Leftrightarrow\exists i\in[\![1,q]\!],\ r_i\geqslant 2\\&\Leftrightarrow\exists i\in[\![1,q]\!],\ p_i^2\text{ divise }d\\&\Leftrightarrow\exists i\in[\![1,q]\!],\ d\in P_i\\&\Leftrightarrow d\in\bigcup_{i=1}^{q}P_i.\end{aligned}$$

Donc, $C_n=\bigcup_{i=1}^{q}P_i$.

c) Soit $i\in[\![1,q]\!]$. Si $d\in P_i$, alors $1\leqslant d\leqslant n$ et il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $d=kp_i^2$. L'entier k doit vérifier $1\leqslant kp_i^2\leqslant n$ puis $\frac{1}{p_i^2}\leqslant k\leqslant\frac{n}{p_i^2}$ et donc $1\leqslant k\leqslant\frac{n}{p_i^2}$.

Inversement, si il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $1\leqslant k\leqslant\frac{n}{p_i^2}$ et $d=kp_i^2$, alors $d\in P_i$ car $p_i\geqslant 2$.

Soit $i\in[\![1,q]\!]$. Il y a $\left[\frac{n}{p_i^2}\right]$ entiers k tels que $1\leqslant k\leqslant\frac{n}{p_i^2}$. L'application $k\mapsto kp_i^2$ est une bijection de $[\![1,[n/p_i^2]]\!]$ sur P_i d'après la question précédente et donc $\operatorname{card}(P_i)=\left[\frac{n}{p_i^2}\right]$.

Soit $(i,j)\in[\![1,q]\!]^2$ tel que $i<j$. Soit $d\in\mathbb{N}^*$. Puisque $p_i\neq p_j$, on a $p_i^2\wedge p_j^2=1$ et donc

$$\begin{aligned}
d \in P_i \cap P_j &\Leftrightarrow 1 \leqslant d \leqslant n \text{ et } d \text{ est divisible par } p_i^2 \text{ et par } p_j^2\\
&\Leftrightarrow 1 \leqslant d \leqslant n \text{ et } d \text{ est divisible par } p_i^2 p_j^2 \text{ (car } p_i^2 \wedge p_j^2 = 1)\\
&\Leftrightarrow 1 \leqslant d \leqslant n \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}^* /\ d = k p_i^2 p_j^2\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* /\ d = k p_i^2 p_j^2 \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{p_i^2 p_j^2}.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on obtient alors $\text{card}\,(P_i \cap P_j) = \left[\dfrac{n}{p_i^2 p_j^2}\right]$.

Par récurrence immédiate, on obtient pour tout $k \in [\![1, q]\!]$ puis toute partie à k éléments $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $[\![1, q]\!]$,

$$\text{card}\,(P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}) = \left[\frac{n}{p_{i_1}^2 \ldots p_{i_k}^2}\right].$$

d)

$$\begin{aligned}
\text{card}\left(\overline{C_n}\right) &= \text{card}\,([\![1, n]\!]) - \text{card}\,(C_n)\\
&= n - \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\{i_1,\, i_2,\, i_k\} \subset [\![1,q]\!]} \text{card}\,(P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k}) \right)\\
&= n + \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k} \left(\sum_{\{i_1,\, i_2,\, i_k\} \subset [\![1,q]\!]} \left[\frac{n}{p_{i_1}^2 \ldots p_{i_k}^2}\right] \right) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{k} \left(\sum_{\{i_1,\, i_2,\, i_k\} \subset [\![1,q]\!]} \left[\frac{n}{p_{i_1}^2 \ldots p_{i_k}^2}\right] \right)\\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d^2}\right] \text{ (d'après la question 3)b)).}
\end{aligned}$$

5) *Probabilité p_n pour qu'un entier de $[\![1, n]\!]$ soit sans facteur carré*

a) $p_n = \dfrac{\text{card}\left(\overline{C_n}\right)}{\text{card}\,([\![1, n]\!])} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\dfrac{n}{d^2}\right]$.

b) Si $d > \sqrt{n}$, alors $\dfrac{n}{d^2} < 1$ puis $\left[\dfrac{n}{d^2}\right] = 0$ et si $d \leqslant \sqrt{n}$, alors $d \leqslant [\sqrt{n}]$. Par suite,

$$\left| \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| = \left| \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d^2}\right] \right| = \left| \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \mu(d) \left[\frac{n}{d^2}\right] \right|,$$

puis

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| &= \left| \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \mu(d) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{d^2}\right] \right) \right|\\
&\leqslant \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} |\mu(d)| \left| \frac{1}{d^2} - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{d^2}\right] \right| \leqslant \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \left| \frac{1}{d^2} - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{d^2}\right] \right|
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $d \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{n}{d^2} - 1 \leqslant \left[\dfrac{n}{d^2}\right] \leqslant \dfrac{n}{d^2}$ puis $-\dfrac{1}{d^2} - \dfrac{1}{n} \leqslant -\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n}{d^2}\right] \leqslant -\dfrac{1}{d^2}$ puis $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{d^2} - \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n}{d^2}\right] \leqslant 0$ et finalement, $\left| \dfrac{1}{d^2} - \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n}{d^2}\right] \right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Par suite,

$$\left| \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| \leqslant \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \left| \frac{1}{d^2} - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{d^2}\right] \right| \leqslant \frac{[\sqrt{n}]}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

c) Ainsi, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p_n \leqslant \sum_{d=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D'après la question 2)d), les deux membres de cet encadrement tendent vers $\dfrac{6}{\pi^2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{6}{\pi^2}.$$

