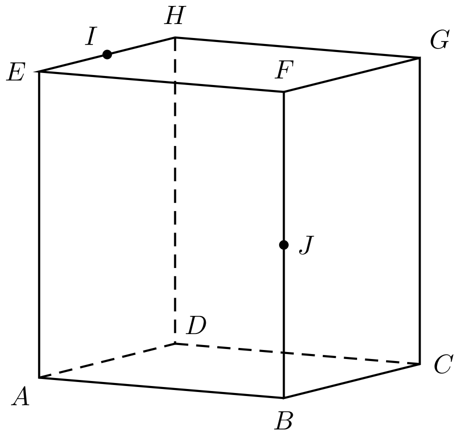
France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) Donner les coordonnées des points I et J.

2) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3) Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

a) En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ est égal à $\dfrac{1}{6}$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{5}{9}\right)$.

d) Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$ et le point H a pour coordonnées $(0,1,1)$. Le point I a donc pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.
De même, le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$ et le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$. Le point J a donc pour coordonnées $\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) a) Le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0,1,1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI).

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BI} = 1 \times (-1) + (-2) \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 = -1 - 1 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b) Le plan (BGI) est le plan passant par $B(1,0,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-2,2)$. Une équation cartésienne du plan (BGI) est $1 \times (x-1) + (-2)(y-0) + 2(z-0) = 0$ ou encore

$$x - 2y + 2z = 1.$$

c) Le point H a pour coordonnées $(0,1,1)$ et le point J a pour coordonnées $\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$. Le point K a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

$$x_K - 2y_K + 2z_K = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1.$$

Donc, le point K appartient au plan (BGI).

3) a) L'aire du triangle FIG est la moitié de l'aire du carré $EFGH$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$. La droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) qui sont deux droites sécantes du plan (FGI). Donc, la droite (BF) est orthogonale au plan (FGI). Finalement,

$$\text{Volume de } FBIG = \frac{1}{3}(\text{ aire de } FGI) \times BF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

b) La droite Δ est la droite passant par $F(1,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,-2,2)$. Une représentation paramétrique de cette droite est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

c) Soit $M(1+t, -2t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (BGI) \Leftrightarrow (1+t) - 2(-2t) + 2(1+2t) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9}.$$

Quand $t = -\dfrac{2}{9}$, on obtient effectivement le point F' de coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{9}\right)$.

d) FF' est donc la hauteur associée à la base BGI du tétraèdre $FBIG$. De plus,

$$FF' = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{36}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \times (\text{aire de } BGI) \times FF' = \dfrac{1}{3} \times (\text{aire de } BGI) \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}(\text{aire de } BGI)$ et donc

$$\text{aire de } BGI = \frac{1/6}{2/9} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}.$$

