

France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Tous les résultats demandés seront arrondis au millième

- 1) Une étude effectuée sur une population d'hommes âgés de 35 à 40 ans a montré que le taux de cholestérol total dans le sang, exprimé en grammes par litre, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1,84$ et d'écart type $\sigma = 0,4$.
- Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre $1,04\text{ g/L}$ et $2,64\text{ g/L}$.
 - Déterminer selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol supérieur à $1,2\text{ g/L}$.
- 2) Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le cholestérol, des patients nécessitant d'être traités ont accepté de participer à un essai clinique organisé par un laboratoire.
Dans cet essai, 60% des patients ont pris le médicament pendant un mois, les autres ayant pris un placebo (comprimé neutre).
On étudie la baisse du taux de cholestérol après l'expérimentation.
On constate une baisse de ce taux chez 80% des patients ayant pris le médicament.
On ne constate aucune baisse pour 90% des personnes ayant pris le placebo.
On choisit au hasard un patient ayant participé à l'expérimentation et on note :
- M l'évènement « le patient a pris le médicament » ;
 - B l'évènement « le taux de cholestérol a baissé chez le patient ».
- Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
 - Calculer la probabilité de l'évènement B .
 - Calculer la probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé.
- 3) Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30% des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.
Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.
- Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.
 - L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.
Que peut-on en conclure ?
 - Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% .
Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37% de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30% .
Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

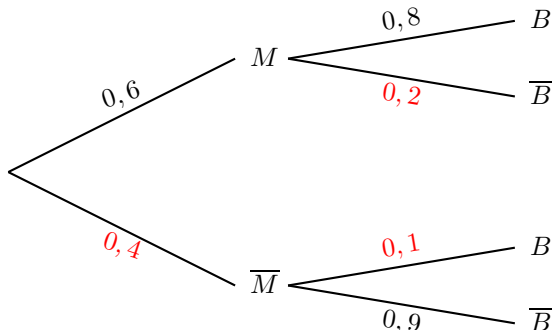
France métropolitaine/Réunion. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) La calculatrice fournit $P(1,04 \leq T \leq 2,64) = 0,954$ arrondi au millième. On note que la probabilité demandée est $P(\mu - 2\sigma \leq T \leq \mu + 2\sigma)$ et donc que cette probabilité est fournie dans le cours (à 10^{-2} près en général).

b) La calculatrice fournit $P(T \geq 1,2) = 0,945$ arrondi au millième.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap \overline{M}) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B) \\ = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52.$$

La probabilité que le taux de cholestérol baisse est 0,52.

c) La probabilité demandée est $P_B(M)$.

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = \frac{12}{13} = 0,923 \text{ arrondi au millième.}$$

3) a) Ici, $n = 100$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,3$. On note que $n \geq 30$, $np = 30 \geq 5$ et $n(1-p) = 70 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} \right] = [0,210; 0,390]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) La fréquence observée est $f = \frac{37}{100} = 0,37$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $p = 0,3$ au seuil 95%.

c) Notons n l'effectif de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

$$0,3 \notin \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \Leftrightarrow 0,3 < 0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,07 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,07} \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,07^2} \\ \Leftrightarrow n > 204,08 \dots \\ \Leftrightarrow n \geq 205 \text{ (car } n \text{ est un entier).}$$

L'effectif minimal de l'échantillon est 205.