

Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1 ; 1 ; 14)$, $B(0 ; 1 ; 8)$ et $C(-2 ; 2 ; 4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) a) Justifier que les points A , B et C définissent un plan.

b) Démontrer que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

c) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x + 8y - z = 0$.

2) On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - \frac{1}{2}, \\ z = 4t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Donner un vecteur directeur de la droite Δ .

b) La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3) Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t + 1, \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC) .

Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(-1, 0, -6)$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-3, 1, -10)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors, en analysant la deuxième coordonnée de chacun de ces deux vecteurs, on a $1 = 0k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et donc les points A , B et C ne sont pas alignés. On en déduit que les points A , B et C définissent un plan.

b)

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \times (-1) + 8 \times 0 + (-1) \times (-6) = -6 + 6 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times (-3) + 8 \times 1 + (-1) \times (-10) = -18 + 8 + 10 = 0.$$

Donc, le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

c) Le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) . On en déduit que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .

Le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 1, 14)$ et de vecteur normal $\vec{n}(6, 8, -1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $6(x-1) + 8(y-1) - (z-14) = 0$ ou encore $6x + 8y - z = 0$.

2) a) Un vecteur directeur de Δ est le vecteur \vec{u} de coordonnées $(2, 1, 4)$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 6 + 1 \times 8 + 4 \times (-1) = 16 \neq 0$. Le vecteur \vec{u} n'est pas orthogonal au vecteur \vec{n} et on sait alors que la droite Δ et le plan (ABC) sont sécants en un point.

3) Soit $M(t^3 + t, t + 1, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (E) .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 6(t^3 + t) + 8(t + 1) - (2t) = 0 \Leftrightarrow 6t^3 + 12t + 8 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 6t + 4 = 0.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 3t^3 + 6t + 4$. La fonction f est continue sur \mathbb{R} en tant que polynôme et strictement croissante sur \mathbb{R} car sa dérivée $f' : t \mapsto 9t^2 + 6$ est strictement positive sur \mathbb{R} . On sait alors que pour tout réel k de $\left] \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \right[$, l'équation $f(t) = k$ admet une solution et une seule dans \mathbb{R} .

Or, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 3t^3 = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3t^3 = +\infty$. Par suite, $\left] \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \right[=] -\infty, +\infty[$.

Le réel $k = 0$ appartient à cet intervalle et on a donc montré qu'il existe un réel t et un seul tel que $f(t) = 0$ ou encore il existe un point de (E) et un seul qui appartient au plan (ABC) .