Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.

2) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1) Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses pour droite asymptote en $+\infty$.

2) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

3) Pour $x \geqslant 1$, $x^2 > 0$. Donc, pour $x \geqslant 1$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or, $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$ et de même, $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ et $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$.
La fonction f' est strictement positive sur $[1, e[$, strictement négative sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

Partie B

1) $u_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \times \ln x\ dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$. Pour $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$ et donc la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est positive sur $[1, 2]$. On en déduit que u_0 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$ d'autre part.

2) Soit n un entier naturel. Soit $x \in [1, 2]$. Donc, $0 < 1 \leqslant x \leqslant 2$ puis $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ par croissance de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $\dfrac{1}{x^{n+1}}$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3) (erreur d'énoncé : remplacer « pour tout entier naturel n » par « pour tout entier naturel non nul n »). Soit n un entier naturel non nul. Par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\ dx \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2)\ dx.$$

Or, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2)\ dx = \ln(2) \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ dx = \ln(2) \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = \ln(2) \left(\left(-\frac{1}{n2^n}\right) - \left(-\frac{1}{n1^n}\right)\right) = \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

4) Puisque pour tout entier naturel non nul n, $1 - \dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ln(2)}{n} \geqslant 0$, on en déduit encore que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

