Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit n un entier naturel.

$$z_{\overrightarrow{OM_{n+2}}} = z_{n+2} = \frac{i}{3} z_{n+1} = \left(\frac{i}{3}\right)^2 z_n = -\frac{1}{9} z_n = -\frac{1}{9} z_{\overrightarrow{OM_n}}.$$

Mais alors,

$$\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{OM_n}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ sont colinéaires et donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{i}{3} z_n\right| = \frac{|i|}{3} |z_n| = \frac{1}{3} OM_n$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (OM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = OM_0 = |z_0| = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$OM_n = OM_0 \times q^n = 100\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{100}{3^n}.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $OM_n \leqslant 1$.
n_0 est un rang à partir duquel tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Déterminons explicitement un tel rang. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} OM_n \leqslant 1 &\Leftrightarrow \frac{100}{3^n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 100 \leqslant 3^n \Leftrightarrow 3^n \geqslant 100 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 5, \end{aligned}$$

car $3^4 < 100$, $3^5 \geqslant 100$ et car la suite $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

A partir du rang $n_0 = 5$, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

